

THÈSES

présentées à

LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

pour l'obtention du titre

de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ de PARIS

(mention Sciences)

par **M. Claude J. WILLARD**

Sujet de la 1^{re} Thèse :

Stratégie en Face d'une demande Aléatoire

Sujet de la 2^e Thèse :

Groupes Hamiltoniens et Théorème de Hölder

Soutenues le 29 Mai 1969, devant la Commission
composée de : Président : DESTOUCHES

Examineurs : VILLE
ABADIE

Claude J. WILLARD

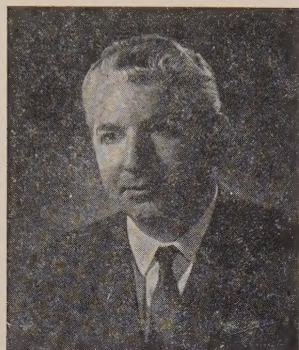
**STRATÉGIE EN FACE
D'UNE
DEMANDE ALÉATOIRE**

suivi de

**GROUPES HAMILTONIENS
ET THÉORÈME DE HOLDER**

PUBLIÉ AVEC LE CONCOURS DU CENTRE
NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ÉDITIONS TECHNIQUES ET ÉCONOMIQUES
PARIS
1971





Claude J. WILLARD

L'Auteur, Docteur de l'Université de Paris en mathématiques appliquées, tour à tour Professeur, Ingénieur Conseil, Fonctionnaire International, a eu l'occasion de travailler et de publier dans de nombreux pays de traditions et d'idéologies différentes.

Cette expérience du monde lui a donné un souci particulier de clarté dans l'exposition, et de rigueur dans le raisonnement.

Les théories présentées dans cet ouvrage sont récentes et purement originales. Elles sont susceptibles d'applications pratiques à de nombreux domaines : qu'il s'agisse de gouvernement ou d'entreprises : il faut faire des prévisions, élaborer des politiques face à un avenir aléatoire. L'auteur a réussi à distinguer plusieurs familles de problèmes, pour lesquels il présente des solutions mathématiques inédites, et une interprétation économique également originale. Ces problèmes appartiennent à la catégorie appelée Programmation Mathématique en univers aléatoire. Le lecteur lira avec intérêt cette « tête de pont » sur un terrain à peine exploré. Qu'il s'agisse, d'un ingénieur, d'un mathématicien, d'un économiste, soit qu'il y recherche un supplément de culture générale, ou un instrument de travail, il consultera un tel ouvrage avec profit.

« Après que j'eus employé quelques années à étudier ainsi dans le livre du monde et à tâcher d'acquérir quelque expérience, je pris un jour résolution d'étudier aussi en moi-même et d'employer toutes les forces de mon esprit à choisir les chemins que je devais suivre, ce qui me réussit beaucoup mieux, ce me semble, que si je ne me fusse jamais éloigné ni de mon pays ni de mes livres. »

René Descarte,
Discours de la méthode.

INTRODUCTION

L'entreprise recherche toujours ou du moins dans la plupart des cas, la maximation de son profit lorsqu'elle n'obéit pas à un intérêt d'ordre politique supérieur, qui lui ferait par exemple vendre à perte en vue de conquérir de nouveaux marchés.

Le profit ou bénéfice immédiat de l'entreprise dépend essentiellement de deux facteurs : la production et la vente. Ces deux facteurs sont soumis aux aléas de la conjoncture, aux fluctuations du marché, aux contraintes techniques, à la pression sociale, dans certains pays aux objectifs définis par les plans nationaux, dans d'autres pays aux orientations seulement de ces plans, et enfin, en régime d'économie libérale, certains éléments imprévisibles tels que la mode peuvent influencer la gestion d'une affaire et rendre la plus rationnelle des prévisions tout à fait aléatoire.

Cependant l'application des mathématiques aux problèmes de la Micro-économie et de la Macro-économie, ne fait que se développer.

Les centres de Recherches, les Sociétés d'Etudes sont de plus en plus nombreux. Dans le monde entier, l'on utilise de plus en plus, l'Econométrie, la Recherche Opérationnelle, les Techniques Fonctionnelles. Et pourtant, aucune de ces méthodes nouvelles n'a encore permis, et ne permettra jamais l'élaboration d'un programme précis en vue d'objectifs fixés

d'avance qui seront nécessairement réalisés quelle que soit la conjoncture.

La justification de ces théories, l'explication de l'attrait qu'elles inspirent, réside probablement dans la recherche d'un modèle mathématique qui rende compte d'une situation concrète.

Lorsque l'on a réussi à mettre en équation une perspective de l'Univers économique particulièrement fluide et mouvant, ou encore un complexe homme-machine, dans la mesure où l'on aura tenu compte de tous les facteurs qui interviennent dans le problème, on peut dire au moins, qu'une base de discussion a été proposée.

Si certaines variations des paramètres qui articulent le modèle mathématique, ne nous écartent pas de la perspective envisagée, mais présentent des possibilités de choix dans les programmes, alors peut-être quelque chose d'utile a été réalisé.

Bien que le sujet de cette étude soit purement théorique, il n'en est pas moins susceptible d'applications industrielles et économiques.

Par exemple, dans le cas où la production ne répond pas à la demande à cause de restrictions financières ou techniques, dans le cas où la production dépasse la demande à cause d'un climat psychologique défavorable ou de l'appauvrissement du marché, on sera amené à définir une politique de coordination entre la production et la vente de façon à obtenir le bénéfice maximum ou la perte minimum pour une période fixée.

Etant donné les conditions de ventes et de production, on essaiera d'établir la composition optimale des différents facteurs de production de manière à maximiser le bénéfice ou minimiser les pertes s'il y a lieu.

Il est souvent possible dans ce genre de problème de déterminer les bornes supérieures et inférieures des variations de volume des ventes.

En général, on néglige l'aspect dynamique de ces variations.

Il est pourtant évident que les Ventes sont essentiellement

variables : le développement des techniques publicitaires, l'accroissement démographique, naturel ou dû aux migrations, l'élévation du niveau de vie, la création de nouveaux marchés ou la suppression d'autres, sont autant de facteurs qui peuvent à long terme, parfois à court terme, modifier l'intervalle de variation du volume des ventes d'un produit.

C'est à cause de cette marge d'incertitude qui existe toujours dans la vente qu'il faudra introduire la probabilité dans le modèle mathématique si l'on veut que ce modèle représente une situation concrète.

Le problème de la programmation ou même de l'ordonnement en vue d'une demande aléatoire a déjà été traité par Dantzig, H. Scarf, Madansky, Theil, Reiter, Simon, de manière indirecte par Ferguson, entre 1955 et 1960. Ces études ont été reprises par Dorfman, Samuelson, Solow, von Piesch et présentées sous un aspect plus économique.

Mais aucun de ces auteurs ne traite de la question des produits dont la demande est liée, ce qui introduit une complication dans le modèle, mais généralise les théories précédentes et nous rapproche de la réalité, si difficile à saisir.

Nous traiterons plus particulièrement du problème des demandes de produits substituables, problème qui tend à disparaître dans les pays industrialisés qui connaissent l'expansion simultanée dans presque tous les domaines, alors qu'au contraire dans les pays en voie de développement, la croissance d'un secteur de l'Economie Nationale implique bien souvent la récession d'autres activités.

Ceci ne signifie pas, d'ailleurs, que la théorie des demandes de produits substituables n'ait pas d'applications dans une économie développée.

Si l'on considère, par exemple, l'Industrie Textile Française, on remarque que, de 1959 à 1964, la demande de laine peignée et la demande de peignées de fibres artificielles et synthétiques sont substituables — chaque année on obtient :
 $r_1 + r_2 \# 100\ 000$ tonnes.

Dans l'industrie automobile, si l'on distingue les véhicules

utilitaires (camionnettes et camions) des voitures particulières et commerciales, on s'aperçoit que, de 1963 à 1964, il y eut baisse de consommation des voitures particulières, mais augmentation des ventes de véhicules utilitaires.

Enfin jusqu'en 1938 les ventes françaises de tabac et d'allumettes offrent un curieux exemple de substituabilité.

Si l'on exprime la demande de tabac en unités de poids et la demande d'allumettes en quantité, l'on s'aperçoit que la somme annuelle des ventes de ces deux articles est à peu près constante.

Par exemple, en 1920, la consommation de tabac était de 46 264 tonnes et l'on a vendu 49 200 millions d'allumettes. La somme de ces deux nombres est de 95 464. Cette somme d'ailleurs représente un indice sans aucune signification concrète.

En 1933, la consommation de tabac était de 54 447 tonnes, celle des allumettes de 41 171 millions. L'indice est de $54\,447 + 41\,171 = 95\,618$, peu différent du précédent. La consommation de tabac a augmenté, celle des allumettes a diminué — avec les unités choisies on a encore la relation : $r_1 + r_2 \# \text{ constante}$.

I. DÉFINITIONS

1) *COMPLÉMENTARITÉ TECHNIQUE ET PSYCHOLOGIQUE*

Reprenant une terminologie classique, nous dirons que des biens économiques sont complémentaires techniques, lorsque leur association est nécessaire face à une demande donnée. Par exemple, si l'on veut écrire, il faut du papier et un crayon — nécessairement — si l'on veut assembler les divers éléments d'une automobile, il faut, entre autres éléments, une carrosserie et un moteur. Cette complémentarité technique se retrouve d'ailleurs à tous les stades de la production.

La complémentarité technique se différencie de la complémentarité psychologique qui, face à une demande donnée, associe des biens économiques sous réserve d'un choix. Par exemple, pain et confiture sont deux biens complémentaires psychologiques car leur association n'est rendue nécessaire que par la décision du demandeur.

Appliquant ces notions à l'étude globale des transports cela signifie que, face à la demande des usagers, différents modes de transport sont complémentaires techniques, lorsque pour relier deux zones données, un seul circuit est possible, utilisant successivement et nécessairement des modes de transport différents. Par exemple, pour aller de Paris-Gare du Nord à Maisons-Alfort, il y a complémentarité technique : métro + bus — mais pour visiter le château de Fontainebleau, il y aura complémentarité psychologique : train de banlieue +

taxi, car on peut décider d'aller à pied de la gare de Fontainebleau au château, c'est-à-dire que l'usage du deuxième mode de transport : le taxi, est facultatif et dépend de la décision du visiteur.

2) SUPPLÉMENTARITÉ DE PROVENANCE ET DE DESTINATION

a) Nous référant au professeur H. Guitton, nous dirons qu'il y a suppléментарité de provenance pour des biens concurrents au stade de la production ou de l'offre. Dans un domaine agricole, par exemple, dont l'étendue est limitée, la production de blé se fera au détriment de la production de pommes de terre ou vice versa.

Dans toute entreprise à productions diversifiées, compte tenu des limitations de budget, et autres contraintes techniques, la direction générale peut décider de diminuer ou même de supprimer la production d'un secteur au profit d'un autre ou de plusieurs autres.

Dans le domaine des transports, les pouvoirs publics peuvent décider de favoriser les transports en commun par rapport aux transports individuels : nous dirons qu'entre ces deux modes de transport il y a suppléментарité de provenance.

b) Suppléментарité de destination.

Il s'agit de l'idée classique de biens substituables : Une demande peut être satisfaite par des biens différents ou différentes combinaisons de ces biens; un costume sur mesure ou deux vêtements de confection; une couleur unique pour la décoration d'un appartement, ou au contraire un choix de coloris, les succédanés font partie des biens supplémentaires de destination et lorsque l'usager a le choix entre différents modes de transport pour aller d'un lieu à un autre : métropolitain, autobus, taxi, voiture personnelle, nous dirons qu'il y a suppléментарité de destination entre ces différents modes de transport.

II. FONCTIONS SUPPLÉMENTAIRES DE PROVENANCE

Définition :

I. Nous dirons qu'un bien économique est fonction supplémentaire de provenance d'un autre bien économique lorsqu'il existe entre les offres de ces deux biens une relation exprimant supplémentarité de provenance.

Soit x_1 la production ou l'offre du bien B_1 et x_2 l'offre du bien B_2 on a $x_1 = f(x_2)$. Les conditions pour que $f(x)$ soit supplémentaire de provenance sont les suivantes :

1) $f(x)$ constamment décroissante.

En effet, lorsque x_2 augmente, x_1 diminue — par exemple, on augmente la production de fibres synthétiques artificielles et l'on diminue la production de laine peignée — ou encore augmentation du nombre de lignes de métro et diminution du nombre de lignes d'autobus.

2) $f'(x) < 0$

car à un léger accroissement de x_2 correspond une légère diminution de x_1 — alors le taux marginal de substitution au sens de Hicks : $\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$ qui signifie qu'il faut produire Δx_1 de x_1 pour remplacer Δx_2 de x_2 s'exprime par $|f'(x_2)|$.

Nous définissons le taux marginal algébrique de substitution, en affectant le signe — au taux marginal de substitution au sens de Hicks — soit : $-\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$. Ce taux marginal algébrique de substitution nous paraît, en effet, illustrer de façon plus précise le phénomène de supplémentarité — puisque nous aurons toujours $f'(x) < 0$.

III. FONCTIONS SUPPLÉMENTAIRES DE DESTINATION

Définition :

Nous dirons qu'un bien économique est fonction supplémentaire de destination d'un autre bien économique, lorsqu'il existe entre les demandes de ces deux biens une relation exprimant supplémentarité de destination.

Soit r_1 la demande du bien B_1 et r_2 la demande du bien B_2 on a : $r_1 = \psi(r_2)$.

Les conditions de supplémentarité de destination pour la fonction $\psi(r_2)$ sont les suivantes :

1) $\psi(r_2)$ constamment décroissante.

En effet, lorsque r_2 augmente, r_1 diminue — c'est-à-dire, par exemple, que la demande globale de transports dans Paris pourra être satisfaite par une plus grande utilisation du métropolitain, au détriment des autobus.

Lorsque l'on fait varier une certaine fonction d'utilité où interviennent les temps de parcours, le coût monétaire, le nombre de changements de métro, les temps d'attente de l'autobus, on s'aperçoit que $r_1 = \psi(r_2)$ est bien une fonction constamment décroissante.

2) $\psi'(r_2) < 0$

Nous avons, en utilisant le même raisonnement que pour les fonctions supplémentaires de provenance :

$$\frac{\Delta r_1}{\Delta r_2} = \psi'(r_2) < 0$$

Remarque :

Ce qui a été dit pour : τ : taux marginal algébrique de substitution est valable aussi bien pour les fonctions supplémentaires de provenance que de destination.

IV. FONCTIONS COMPLÉMENTAIRES TECHNIQUES

Nous dirons qu'un bien économique est fonction complémentaire technique d'un autre bien économique, lorsqu'il existe entre les demandes de ces deux biens une relation exprimant complémentarité technique.

La complémentarité étant relative à la demande, nous utiliserons la même fonction que pour la suppléantarité de destination : $r_1 = \psi(r_2)$.

Les conditions de complémentarité technique sont les suivantes :

1) $\psi(r_2)$ constamment croissante.

En effet, lorsque r_2 augmente, r_1 augmente aussi.

Par exemple, sur un trajet d'une zone à une autre, les demandes successives r_1 et r_2 relatives à deux modes de transports différents qui se succèdent, varient en général dans le même sens; soit en fonction du temps ou de l'utilité économique;

2) $\psi'(r_2) > 0$

Nous avons alors $\frac{\Delta r_1}{\Delta r_2} = \psi'(r_2) > 0$

on définit alors un taux marginal algébrique de complémentarité exprimant qu'à l'accroissement Δr_1 de la demande du bien B_1 correspond un accroissement Δr_2 du bien B_2 nécessairement.

V. FONCTIONS COMPLÉMENTAIRES PSYCHOLOGIQUES

Nous dirons qu'un bien économique est fonction complémentaire psychologique d'un autre bien, lorsqu'il existe entre

ces deux biens une relation exprimant complémentarité psychologique.

Soit $r_1 = \psi(r_2)$.

Les conditions de complémentarité psychologique sont les suivantes :

1) $\psi(r)$ monotone, croissante.

En effet, lorsque r_2 augmente, r_1 augmente ou est nul. (Cf : définition — complémentarité psychologique.)

2) $\Psi'(r) \geq 0$

Nous avons en effet $\frac{\Delta r_1}{\Delta r_2} = \Psi'(r_2) \geq 0$

On définit alors un taux marginal algébrique de complémentarité psychologique.

Remarque :

Par souci de simplicité, dans une première phase, nous avons adopté la définition ci-contre de la complémentarité psychologique, définition inspirée d'économistes français tels que Guitton et Dehove.

Il n'en est pas moins vrai qu'il existe une autre définition de la complémentarité psychologique, due à Allais, et qui conduit à une synthèse mathématique très élégante de ces notions. Pour Allais, la complémentarité psychologique s'exprime à l'aide des « courbes de satiété » lieu des points où la désirabilité relative est nulle. Ces courbes se construisent à partir des lignes d'indifférence classiques. Elles signifient que les complémentaires psychologiques sont essentiellement des services tels que la satiété de l'un disparaît lorsque la quantité de l'autre augmente.

Cependant, il n'y a pas incompatibilité entre ces deux concepts de la complémentarité psychologique. Celui que j'ai choisi, à la fois plus élémentaire et plus opérationnel, ne vise pas à rendre compte de la théorie économétrique générale.

VI. ETUDE DES VARIATIONS DU TAUX MARGINAL ALGÈBRIQUE DE SUBSTITUTION

Soit τ le taux marginal algébrique de substitution défini ci-dessus — nous avons : $\tau_x = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = f'(x_2)$.

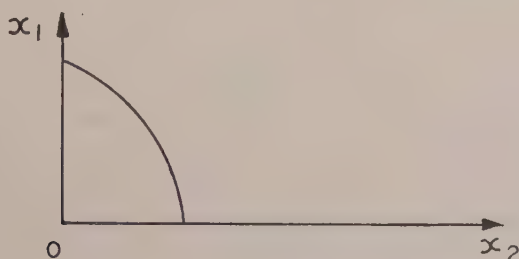
1) HYPOTHÈSE DE τ DÉCROISSANT

Il existe un phénomène d'accélération dans la substitution d'un produit par un autre; cela est dû à la fois aux conditions du marché : la clientèle s'habituant au nouveau produit et aux conditions technologiques qui s'améliorent au fur et à mesure de la fabrication. Cela veut dire que la vitesse de remplacement de B_2 par B_1 augmente avec la production x_1 de B_1 ; autrement dit, plus on fabriquera du produit B_1 plus diminueront les possibilités de fabriquer B_2 . Par exemple, si dans une première phase une unité de B_1 se substitue à une unité de B_2 ; dans une deuxième phase deux unités de B_1 se substitueront à une unité de B_2 et ainsi de suite. Le taux marginal de substitution au sens de Hicks augmente, mais τ décroît — ceci s'exprime par :

$$\frac{d\tau}{dx_2} = f''(x_2) < 0$$

Nous dirons que dans ce cas il y a accélération du taux marginal algébrique de substitution.

Courbe représentative de $x_1 = f(x_2)$ pour τ_x décroissant :

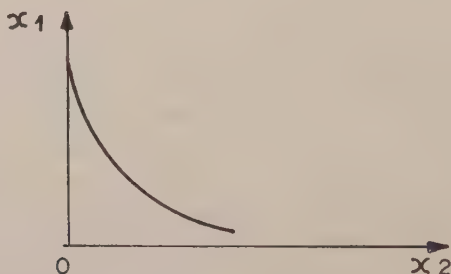


2) HYPOTHÈSE DE τ CROISSANT

La vitesse de remplacement de B_2 par B_1 diminue avec la production x_1 de B_1 . Nous dirons qu'il y a saturation du taux marginal algébrique de substitution, ce qui s'exprime par :

$$\frac{d\tau}{dx_2} = f''(x_2) > 0$$

Courbe représentative de $x_1 = f(x_2)$ pour τ croissant.



Remarque :

Des auteurs tels que Hicks, Marshall, Allais ont traité du problème du taux marginal de substitution ou de l'utilité marginale de substitution (Marshall) et admettent le principe d'un taux marginal de substitution toujours décroissant (ou croissant).

Ce qui, à première vue, semble en contradiction avec mes hypothèses successives de τ croissant et décroissant. En fait, il n'y a pas contradiction, car les auteurs précités se placent dans le cas d'un équilibre économique stable aux lignes d'indifférence tournant leur convexité vers les axes. Néanmoins le cas d'une ligne d'indifférence présentant sa concavité vers les axes peut se présenter, toujours dans le cas de l'utilité marginale décroissante. (Cf. Marshall, *Value and Capital*, 2^e éd., p. 16.)

Nous nous plaçons ici dans une perspective micro-économique plus restreinte où l'on se contente d'observer sur des cas concrets le phénomène de substitution de deux biens B_1 et B_2 sans faire d'hypothèse préalable au point de vue théorie économique. Il est cependant rassurant de constater qu'il n'y a aucune incompatibilité entre les concepts que je présente et les théories classiques.

VII. SUPPLÉMENTARITÉ PARFAITE DE PROVENANCE ET DE DESTINATION

1) SUPPLÉMENTARITÉ PARFAITE DE DESTINATION

Des auteurs tels que G. J. Stigler, P. A. Samuelson, R. D. G. Allen, ont traité de la « substituabilité parfaite » — c'est-à-dire que par rapport à la demande, on définit des biens substituables tels qu'il existe entre ces biens une relation de substituabilité s'exprimant linéairement : si r_1 et r_2 représentent les demandes respectives des biens B_1 et B_2 et si a , b , c sont des constantes positives, le phénomène de « substituabilité parfaite » au sens des auteurs précités s'exprime par la relation $ar_1 + br_2 = c$ par opposition à la substitutualité classique où la relation entre r_1 et r_2 n'est plus linéaire. En terminologie économique française, cela signifie que l'on distingue la complémentarité de destination de la complémentarité parfaite de destination selon que la relation exprimant complémentarité soit linéaire ou non. Ceci se généralise à n biens et nous dirons qu'il y a complémentarité parfaite de destination entre n biens $B_1, B_2, \dots B_n$, lorsqu'il existe entre les demandes respectives de ces n biens, une relation linéaire de

la forme
$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i r_i = k.$$

(les a_i et les k étant des constantes positives).

2) SUPPLÉMENTARITÉ PARFAITE DE PROVENANCE

De même que nous avons distingué la complémentarité parfaite de destination de la complémentarité de destination, nous distinguons selon les mêmes critères, la complémentarité parfaite de provenance de la complémentarité de provenance — et nous dirons qu'il y a complémentarité parfaite de provenance entre n biens $B_1, B_2, \dots B_n$, lorsqu'il existe entre les productions ou offres respectives de ces n biens, une relation

linéaire de la forme
$$\sum_{i=1}^n b_i x_i = c$$

(les b_i et c étant des constantes positives et les x_i représentant les offres respectives des B_i .)

Remarque :

Dans le cas de la complémentarité parfaite de provenance et de destination, le taux marginal algébrique de substitution est constant.

Complémentarité technique parfaite.

Nous inspirant des mêmes critères que pour la complémentarité, nous dirons qu'il y a complémentarité technique parfaite, entre deux biens B_1 et B_2 lorsque la fonction complémentaire technique qui lie ces deux biens est linéaire :

$$r_1 = ar_2 + b$$

(a et b sont des constantes positives; r_1 et r_2 les demandes respectives de B_1 et B_2 .)

Remarque :

Le taux marginal algébrique de complémentarité parfaite est constant.

ESSAI DE SOLUTION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

1) FORMULATION DU MODÈLE STATIQUE

Soit x_i la quantité du bien B_i que l'on désire produire en vue de maximiser le bénéfice L .

L'intervalle de variation des ventes du bien B_i que l'on prévoit est représenté par : (d_i, D_i) .

d_i , borne inférieure, est constituée par exemple par des commandes fixes sous contrat, D_i , la borne supérieure est la capacité maximum de ventes déterminée expérimentalement ou par des études du marché.

Pour n biens B_i , nous aurons par conséquent la relation :

$$0 \leq d_i \leq x_i \leq D_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Des difficultés d'approvisionnement, des délais de livraison, le nombre d'heures de travail nécessairement limité imposent certaines restrictions à la production.

Soit b_j , ($j = 1, 2, \dots, p$) les quantités maximales disponibles de facteurs de production j .

Soit a_{ij} la quantité de facteur de production j nécessaire à la fabrication de biens B_i (les a_{ij} sont souvent appelés coefficients techniques).

On obtient les relations :
$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} \cdot x_i \leq b_j \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (2)$$

Soit c_i le bénéfice par unité du bien B_i , il s'agira de calculer

$$L(\max) = \sum_{i=1}^{i=n} c_i \cdot x_i \quad (3)$$

les x_i étant soumis aux contraintes (1) et (2).

Il s'agit là d'un problème classique de programmation linéaire. Cependant la solution de ce problème implique que les biens B_i dont on a déterminé mathématiquement les quantités respectives x_i à produire pour maximiser le bénéfice, seront effectivement vendus, c'est-à-dire que si les biens B_i sont supplémentaires parfaits de provenance, ils sont aussi supplémentaires parfaits de destination. Autrement dit, soit r_i la demande de B_i ; à une relation du type :

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} \cdot x_i = b_j \quad \text{correspond :} \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} \cdot r_i = b_j$$

Ceci d'ailleurs ne change nullement la structure du modèle qui demeure un programme linéaire classique.

II. FORMULATION DU MODÈLE « DYNAMIQUE »

1) FONCTION $V(x/r)$

Nous introduisons dans le modèle un facteur d'incertitude concernant la vente à l'aide d'une fonction $V(x/r)$ définie de la manière suivante :

Notations :

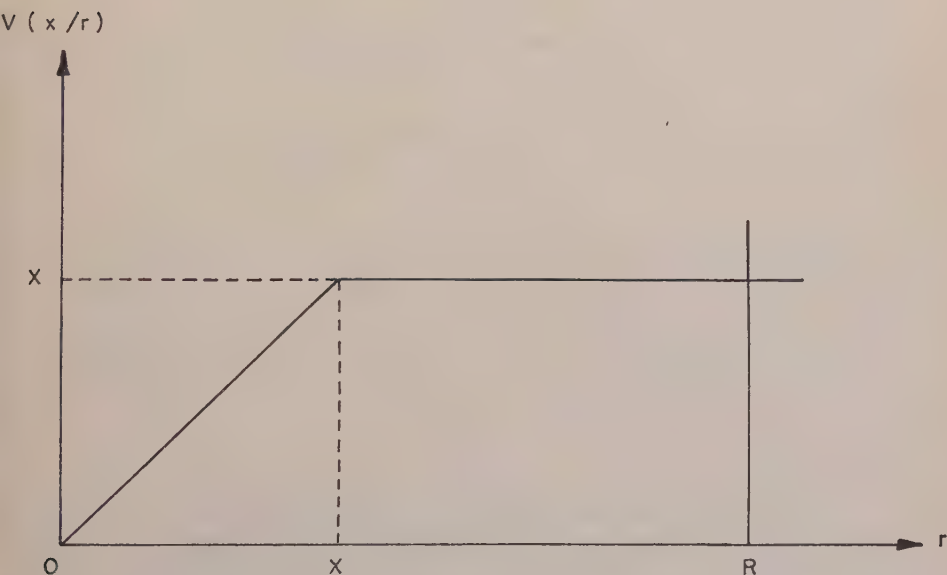
x = production ; r = demande ; R = borne supérieure de r

$$\left| \begin{array}{ll} V(x/r) = x & \text{pour } x \leq r \leq R \\ V(x/r) = r & \text{pour } 0 \leq r \leq x \end{array} \right.$$

Moyennant les hypothèses que lorsque la demande est inférieure à la production, elle est satisfaite intégralement, et lorsque la production est inférieure à la demande, elle est absorbée totalement.

$V(x/r)$ représente par conséquent le volume des ventes effectivement réalisées, compte tenu des écarts entre la production et la demande.

Une fonction de ce type a déjà été utilisée par G. B. Dantzig pour sa théorie de l'ordonnancement en vue d'une demande aléatoire. Von Piesch en donne la représentation graphique suivante, se fixant par exemple la production x :



Nous allons immédiatement généraliser cette représentation graphique au cas de deux biens différents dont les demandes respectives sont liées par une relation de la forme :

$$r_1 + r_2 = k \quad (\text{supplémentarité parfaite de destination}).$$

Remarque :

$$V(x/r) = \text{Min} \{x, r\}, \{r \leq R\} = \text{Min} \{x, r, R\}$$

Notations :

$$V_1 = \text{Min} \{x_1, r_1, R_1\} \quad V_2 = \text{Min} \{x_2, r_2, R_2\}$$

Nous nous fixons x_1 et x_2 , R_1 et R_2 étant les bornes supérieures respectives de r_1 et r_2 .

Nous considérons le système :

$$I \quad \left| \begin{array}{l} W = V_1 + V_2 \\ r_1 + r_2 = k \end{array} \right.$$

et étudions la variation de W en fonction de r_1 .

En d'autres termes :

$$I \equiv II \quad \left| \begin{array}{l} W = \text{Min} \{x_1, r_1, R_1\} + \text{Min} \{x_2, k - r_1, R_2\} \\ 0 \leq r_1 \leq k \end{array} \right.$$

Nous présentons le cas suivant à titre d'exemple :

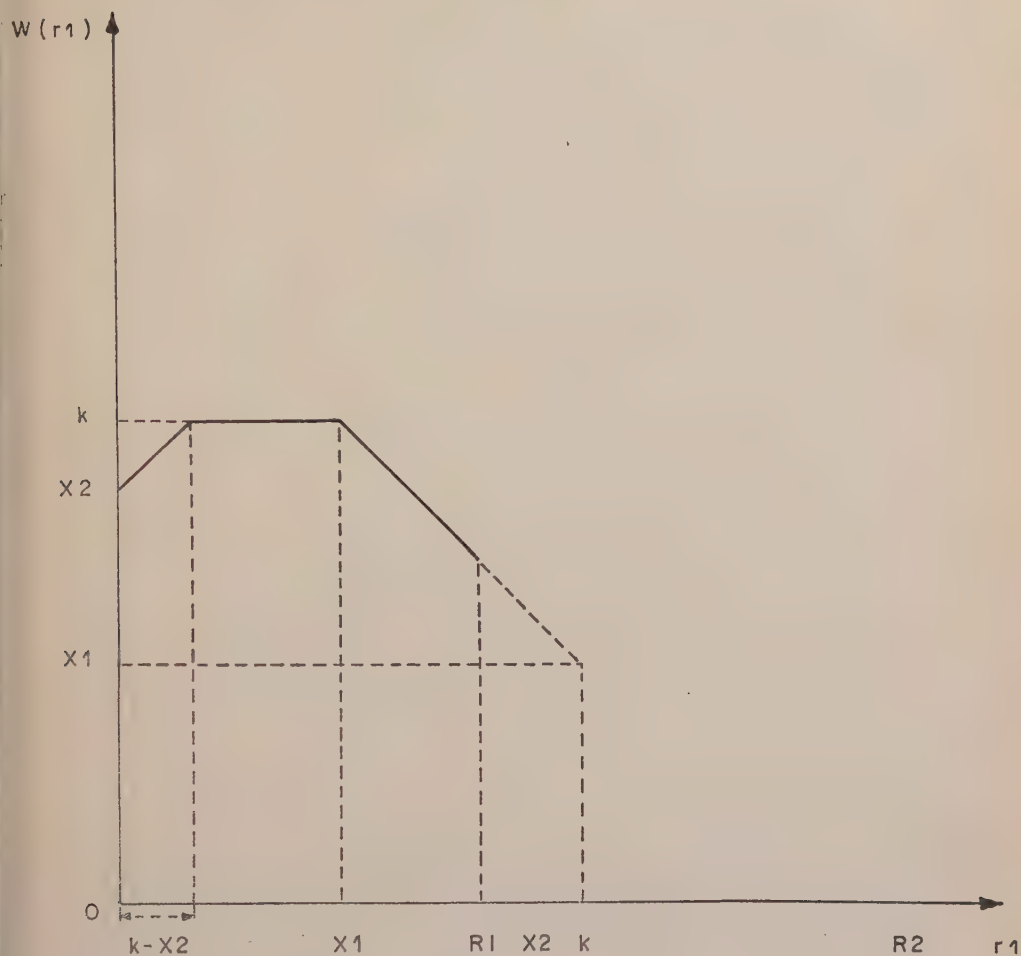
Hypothèses :

$$x_1 < R_1 < x_2 < k < R_2 \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 > k$$

c'est-à-dire que la demande totale k est inférieure à la production $x_1 + x_2$ mais nous verrons que cette demande ne sera satisfaite pleinement que pour un intervalle délimité des variations respectives de r_1 et r_2 .

Remarque :

Nous aurions pu, dans les hypothèses, choisir $R_1 > k$, le fait d'imposer une limite supérieure de vente plus restreinte à l'un des produits n'introduit aucune difficulté théorique.



$$1) r_1 = 0 \Rightarrow V_1 = 0 \Rightarrow r_2 = k \Rightarrow V_2 = x_2 \Rightarrow W = x_2$$

$$W(0) = x_2$$

$$2) 0 < r_1 \leq k - x_2 \Rightarrow k - r_1 \geq x_2 \Rightarrow V_2 = x_2$$

$$\text{comme } x_1 + x_2 > k \Rightarrow k - x_2 < x_1$$

$$\text{nous avons } r_1 < x_1 \text{ et } V_1 = r_1$$

$$\text{d'où } \boxed{W(r_1) = r_1 + x_2} \quad \text{pour } 0 < r_1 < k - x_2$$

$$3) \quad \boxed{W(k - x_2) = k}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad k - x_2 < r_1 \leq x_1 &\Rightarrow V_1 = r_1 \\ \text{d'autre part } k - x_2 \leq r_1 &\Rightarrow k - r_1 \leq x_2 \\ \Rightarrow r_2 \leq x_2 &\Rightarrow V_2 = r_2 = k - r_1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \boxed{W(r_1) = k} \quad \text{pour } k - x_2 < r_1 \leq x_1$$

$$5) \quad x_1 < r_1 < R_1$$

ce qui entraîne $V_1 = x_1$

$$\begin{aligned} \text{d'autre part } r_1 > x_1 &\Rightarrow k - r_1 < k - x_1 \\ \text{et l'hypothèse } x_1 + x_2 > k &\Rightarrow k - x_1 < x_2 \\ &\Rightarrow r_2 < x_2 \\ &\Rightarrow V_2 = r_2 = k - r_1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \boxed{W = k + x_1 - r_1}$$

$$\text{pour } r_1 = R_1 \quad \text{on obtient } \boxed{W = k + x_1 - R_1}$$

Conclusion :

$$\boxed{W(\max) = k} \quad \text{pour } k - x_2 \leq r_1 \leq x_1$$

mais surtout nous avons représenté les variations du volume des ventes de deux biens supplémentaires parfaits de destination, dont on a décidé d'avance les niveaux respectifs de production, en fonction de la demande d'un seul de ces deux biens.

2) ESPÉRANCE DE PROFIT

Nous allons maintenant exprimer la vente en termes de probabilités, traiter le problème dans le cas d'un produit unique

Stratégie en face d'une demande aléatoire

selon une méthode inspirée de von Piesch, et ensuite présenter notre généralisation de la question dans le cas d'abord de deux produits liés par la relation simple précédente et enfin dans le cas d'un nombre quelconque de produits liés par une relation linéaire.

1) NOTATIONS :

$P(u)$ = probabilité de vendre une quantité supérieure ou égale à u , ($u \leq R$)

$Q(u)$ = probabilité de vendre une quantité inférieure à u .

Remarque :

Nous avons la relation $P(u) + Q(u) = 1$

$q(u)$ = densité de probabilité de $Q(u)$

p, c = prix unitaires de vente et de production respectivement

E = espérance mathématique.

2) DÉFINITION

Nous allons écrire que le bénéfice L est égal au prix total des ventes moins les frais fixes de productions :

$$L = pV - cx$$

ce qui nous donne en termes de probabilités :

$$EL = pEV - cx$$

L'espérance mathématique du bénéfice est égale à l'espérance mathématique du volume des ventes réalisées moins les frais fixes de production, exprimés en unités monétaires.

3) RELATIONS ENTRE L'ESPERANCE DE VENTE EV D'UN PRODUIT ET SA DISTRIBUTION DE PROBABILITE P :

$$EV = \int_0^R V(r, x) q(r) dr = \int_0^x r q(r) dr + \int_x^R x q(r) dr$$

$$EV = rQ(r) \Big|_0^x - \int_0^x Q(r) dr + x \int_x^R q(r) dr$$

$$EV = xQ(x) - \int_0^x Q(r) dr + x. [Q(R) - Q(x)]$$

$$EV = xQ(R) - \int_0^x Q(r) dr = xQ(R) - \int_0^x [I - P(r)] dr$$

$$EV = xQ(R) - x + \int_0^x P(r) dr$$

$$EV = -xP(R) + \int_0^x P(r) dr.$$

or $P(R) = 0$ par hypothèse, (probabilité d'atteindre la limite supérieure de la demande)

$$\Rightarrow EV = \int_0^x P(r) dr.$$

4) PROPOSITION I

Si l'on se donne une distribution de la demande d'un produit : soit $P(r) = \text{prob. } \{r \geq t\}$, continue, connaissant le prix de vente unitaire p et le coût de production unitaire c , on en déduit le niveau de production qu'il faudra atteindre afin d'obtenir l'espérance maximale de profit : pour $r \leq R$; par la relation $P(x) = \frac{c}{p}$ sous la condition $0 \leq \frac{c}{p} \leq 1$.

Stratégie en face d'une demande aléatoire

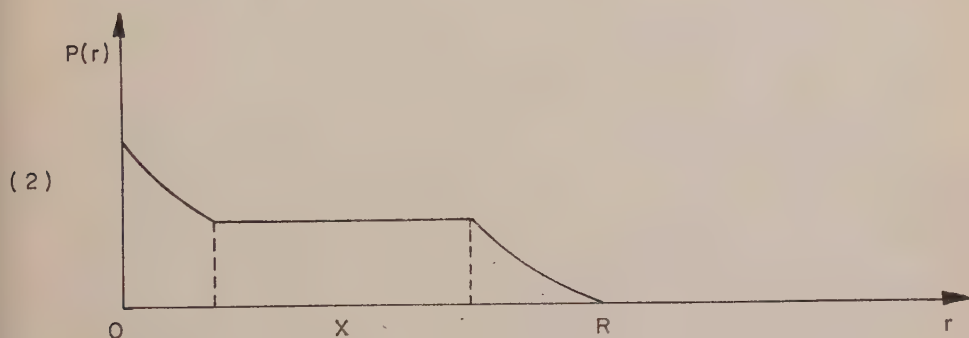
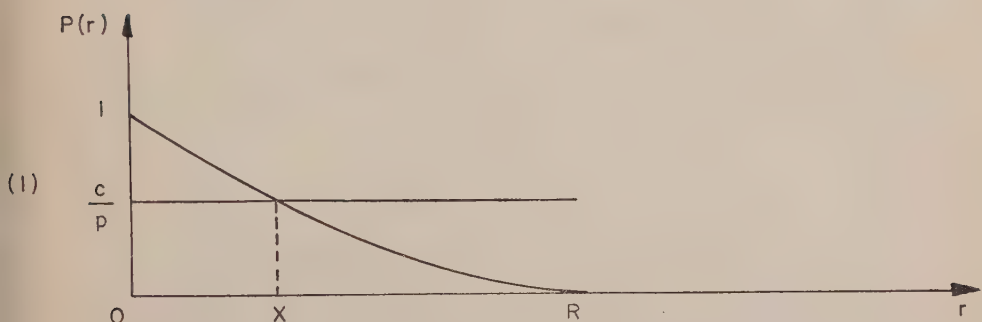
Démonstration :

$$EL = pEV - cx$$

$$EL'_x = 0 = pEV'_x - c$$

$$EV'_x = \frac{c}{p} = P(x)$$

Solution graphique :



Remarques :

a) L'intersection de la courbe $P(r)$ avec la droite $P = \frac{c}{p}$ nous donnera en abscisse une valeur x qui doit maximiser l'espérance de profit.

b) Dans le cas d'un palier pour la fonction $P(r)$, on peut obtenir une infinité de valeurs pour x (fig. 2) si l'ordonnée du

palier est égale à $\frac{c}{p}$ on choisira pour x la borne inférieure de l'intervalle possible de façon à minimiser les coûts.

c) Il convient de noter que l'hypothèse sur la continuité de $P(r)$ correspond à un point de vue pratique; en effet, les fonctions $P(r)$ sont obtenues, expérimentalement par points, et sont, en général, le résultat d'un ajustement — on admet que $P(r)$ est continue pour des raisons de commodité. Le fait que $P(r)$ soit continue implique la dérivabilité de EV.

Le cas de $P(r)$ discontinue est traité dans la deuxième partie de cette étude d'un point de vue légèrement différent pour l'ordonnancement face à une demande aléatoire.

5) PROPOSITION II (généralisation de la proposition I) :

Soit deux produits dont la demande est liée par une relation de la forme $r_i + r_j = k$, les productions par $x_i + x_j = k$, si l'on connaît les distributions respectives de la demande, P_i , les prix de vente p_i et les coûts de production c_i , on détermine les niveaux de production qui rendent maximale l'espérance de profit, à l'aide de la relation : $P_i(x_i) = \frac{p_j + c_i - c_j}{p_i + p_j}$.

P_i étant supposée continue, $P_i(t) = \text{prob} \{r \geq t\}$. Ce qui exige les conditions : $P_i(x_i) + P_j(x_j) = 1$ et $0 \leq \frac{p_j + c_i - c_j}{p_i + p_j} \leq 1$

Notations :

r_i = quantité r_i du bien B_i , demandé

r_j = quantité r_j du bien B_j , demandé

Par hypothèse nous avons la relation $r_i + r_j = k$

k = constante [cette constante peut avoir une signification concrète ou simplement représenter un indice (cf. introduction)].

$P_i(t)$ = Distribution de probabilités de la demande de B_i
en d'autres termes :

$$P_i(t) = \text{Prob. } \{r_i \geq t\}$$

$P_j(t)$ = Distribution de probabilités de la demande de B_j
ou encore :

$$P_j(t) = \text{Prob. } \{r_j \geq t\}$$

$$Q_i(t) = \text{Prob. } \{r_i < t\}$$

$$Q_j(t) = \text{Prob. } \{r_j < t\}$$

L_i = bénéfice réalisé sur la vente du bien B_i

L_j = bénéfice réalisé sur la vente du bien B_j

W = bénéfice total réalisé sur les biens B_i et B_j .

p_i = prix de vente unitaire du bien B_i

p_j = prix de vente unitaire du bien B_j

c_i = coût unitaire de la production du bien B_i

c_j = coût unitaire de la production du bien B_j

x_i = production du bien B_i

x_j = production du bien B_j

V_i = volume des ventes effectivement réalisées sur B_i

V_j = volume des ventes effectivement réalisées sur B_j

E = espérance mathématique.

Démonstration :

Utilisant le résultat précédent nous pouvons écrire :

$$(1) EL_i = p_i EV_i - c_i x_i$$

$$(2) EL_j = p_j EV_j - c_j x_j$$

soit

$$EW = EL_i + EL_j$$

$$EW = p_i EV_i + p_j EV_j - c_i x_i - c_j x_j$$

$$EW = p_i \int_0^{x_i} P_i(t) dt + p_j \int_0^{x_j} P_j(t) dt - c_i x_i - c_j x_j$$

Pour le calcul de EW , nous utiliserons les deux considérations suivantes :

a) Nous nous sommes placés dans l'hypothèse de biens supplémentaires parfaits de provenance et de destination.

D'où les relations : $r_i + r_j = k$ et $x_i + x_j = k$

b) Relation entre P_i et P_j .

$r_i + r_j = k \implies P_i(t) = Q_j(k-t)$ pour $0 \leq t \leq k$

en effet : Prob. $\{r_i \geq t\} = \text{Prob. } \{r_j < k-t\}$

Par ailleurs $Q_j(k-t) + P_j(k-t) = 1$

en effet : Prob. $\{r_j < (k-t)\} + \text{Prob. } \{r_j \geq (k-t)\} = 1;$

$$0 \leq t \leq k$$

Il en résulte : $P_i(t) + P_j(k-t) = 1$

De même on a : $P_i(k-t) + P_j(t) = 1$

Tenant compte de (a) et (b) :

$$\begin{aligned} EW = & p_i \int_0^{x_i} P_i(t) dt + p_j \int_0^{k-x_i} [1 - P_i(k-t)] dt - c_i x_i - \\ & - c_j (k - x_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EW = & p_i \int_0^{x_i} P_i(t) dt + p_j (k - x_i) + p_j \int_0^{k-x_i} P_i(k-t) dt - \\ & - c_i x_i - c_j (k - x_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EW = & p_i \int_0^{x_i} P_i(t) dt - p_j \int_0^{k-x_i} (k-t) dt + x_i (c_j - c_i - p_j) + \\ & + k (p_j - c_j) \end{aligned}$$

A l'optimum nous devons avoir $\frac{dEW}{dx_i} = 0$

$$\text{soit : } p_i P_i(x_i) + p_j P_i(x_i) + c_j - c_i - p_j = 0$$

$$\text{et } P_i(x_i) = \frac{p_j + c_i - c_j}{p_i + p_j}$$

Cette formule nous permet de calculer x_i , soit directement si la fonction $P_i(t)$ est suffisamment simple, soit par les méthodes de l'analyse numérique ou même graphiquement dans les cas difficiles, ce qui nous permettra ensuite de déterminer EW .

Nous avons de plus la condition : $0 \leq \frac{p_j + c_i - c_j}{p_i + p_j} \leq 1$

toujours réalisée du point de vue économique : en effet : $c_i \leq p_i$ et $c_j \leq p_j$ ce qui est conforme à la perspective économique envisagée dans le chapitre : nous supposons les coûts de production inférieurs aux prix de vente.

Autre solution :

On peut également envisager un autre type de solution inspiré de la théorie des multiplicateurs de Lagrange.

Le problème peut-être présenté de la manière suivante :

Trouver le maximum de $EW(x_i, x_j)$, compte tenu des relations : (a) $x_i + x_j = k$

$$(b) P_i(t) + P_j(k - t) = 1$$

$$0 \leq t \leq k$$

$$\text{et } EW = p_i EV_i(x_i) + p_j EV_j(x_j) - c_i x_i - c_j x_j$$

Solution :

Soit u un multiplicateur de Lagrange, nous pouvons écrire :

$$EW = EW - u(x_i + x_j - k)$$

$$\text{et } \frac{dEW}{dx_i} = \frac{dEW}{dx_j} = 0 \text{ à l'optimum}$$

$$\text{soit : } I \quad \begin{cases} p_i EV'_i x_i - c_i - u = 0 \\ p_j EV'_j x_j - c_j - u = 0 \end{cases}$$

$$I \equiv II \quad \begin{cases} p_i P_i(x_i) - c_i - u = 0 \\ p_j P_j(x_j) - c_j - u = 0 \end{cases}$$

La relation (b) nous permet de déterminer u :

comme $0 \leq x_i \leq k$ et $0 \leq x_j \leq k$ et de plus $x_i + x_j = k$ on peut écrire : $P_i(x_i) + P_j(x_j) = P_i(x_i) + P_j(k - x_i) = 1$

$$\text{ou encore : } \frac{c_i + u}{p_i} + \frac{c_j + u}{p_j} = 1$$

$$\text{soit : } u = \frac{p_i p_j - c_i p_j - c_j p_i}{p_i + p_j}$$

Calculons par exemple $P_i(x_i)$ dans II :

$$P_i(x_i) = \frac{u + c_i}{p_i} = \frac{I}{p_i} \left[\frac{p_i p_j - c_i p_j - c_j p_i}{p_i + p_j} + c_i \right]$$

$P_i(x_i) = \frac{p_j + c_i - c_j}{p_i + p_j}$ nous retrouvons bien le résultat précédent.

Remarque :

On ne peut se donner à priori, à la fois P_i et P_j , la condition des demandes substituables implique la relation (b) : $P_i(t) + P_j(k - t) = 1$ c'est-à-dire que la donnée de P_i détermine la fonction de P_j .

6) PROPOSITION III (généralisation de la proposition II) :

Si l'on se donne les distributions respectives P_i (fonction continue, constamment décroissante) de la demande de n produits, les demandes étant liées par une relation linéaire :

$$\sum_{i=1}^n a_i r_i = k; \quad \text{les productions par :} \quad \sum_{i=1}^n a_i x_i = k;$$

connaissant les coûts de production c_i ; et les prix de vente unitaires p_i on obtient les niveaux respectifs de production x_i qui rendent maximale l'espérance de profit à l'aide du système :

$$(1) a_i P_i^{-1} \left(\frac{c_i + u a_i}{p_i} \right) = k$$

$$(2) x_i = P_i^{-1} \left(\frac{c_i + u a_i}{p_i} \right) \text{ où l'on élimine } u.$$

Démonstration :

1) NOTATIONS :

r_i = quantité r_i du bien B_i demandé :

k, a_i = constantes positives

$i = 1, 2, \dots, n$

$i = 1, 2, \dots, n$

Stratégie en face d'une demande aléatoire

$P_i(t)$ = distribution marginale de la i ème composante du vecteur aléatoire $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$

$P_i(t) = \text{prob. } \{r_i \geq t\}$ $i = 1, 2, \dots, n$

V_i = volume des ventes effectivement réalisées sur i

x_i = production du bien B_i

p_i = prix de vente unitaire du bien B_i

c_i = coût unitaire de la production de B_i

L_i = bénéfice réalisé sur la vente du bien B_i

W = bénéfice total réalisé sur la vente des biens B_i

$i = 1, 2, \dots, n$

E = espérance mathématique.

Solution :

$$\text{Par définition } W = \sum_{i=1}^{i=n} L_i$$

$$\text{ce qui nous donne } EW = E \sum_{i=1}^{i=n} L_i$$

Or $L_i = p_i V_i - c_i x_i$ c'est-à-dire que pour une valeur de x_i fixée, L est une fonction linéaire de V_i , V_i étant fonction de la demande aléatoire r_i de B_i .

Autrement dit, L_i peut-être considérée comme variable aléatoire continue, pour $r_i \leq x_i$.

Par conséquent nous pouvons appliquer ici un résultat connu à savoir que l'espérance mathématique de la somme de plusieurs variables aléatoires, indépendantes ou non, est égale à la somme des espérances mathématiques de cha-

cune de ces variables. D'où : $EW = \sum_{i=1}^{i=n} EL_i$

$$\text{ou encore : } EW = \sum_{i=1}^{i=n} [p_i EV_i - c_i x_i]$$

Nous avons de plus une relation linéaire traduisant l'hypothèse sur la liaison des demandes soit : $\sum_{i=1}^{i=n} a_i r_i = k$

et d'autre part l'hypothèse : $\sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i = k \quad (a_i \geq 0)$

(ce qui traduit le fait que l'on envisage des biens économiques supplémentaires parfaits de provenance et de destination).

Pour le calcul de EW : nous généralisons la méthode utilisée pour la proposition II (deuxième solution inspirée de la théorie des multiplicateurs de Lagrange).

Considérons le système suivant :

$$(1) \text{ EW (max)} = \sum_{i=1}^{i=n} (p_i \text{ EV}_i - c_i x_i)$$

$$(2) \sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i = k$$

soit u un multiplicateur de Lagrange :

Nous pouvons écrire :

$$\text{EW} = \sum_{i=1}^{i=n} [p_i \text{ EV}_i - c_i x_i] - u \left[\sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i - k \right]$$

ou encore :

$$\text{EW} = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \int_0^{x_i} P_i(t) dt - \sum_{i=1}^{i=n} c_i x_i - u \left[\sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i - k \right]$$

$$\text{EW} = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \int_0^{x_i} P_i(t) dt - \sum_{i=1}^{i=n} (c_i + u a_i) x_i + uk$$

$$\text{A l'optimum nous devons avoir } \frac{d\text{EW}}{dx_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{D'où les relations : } p_i P_i(x_i) - c_i - u a_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Chacune de ces relations nous permet de calculer x_i en fonction du paramètre u :

$$P_i(x_i) = \frac{c_i + u a_i}{p_i}$$

ou encore :

$$x_i = P_i^{-1} \left(\frac{c_i + u a_i}{p_i} \right)$$

Pour le calcul de x_i il nous faut d'abord déterminer u par la relation :

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i P_i^{-1} \left(\frac{c_i + u a_i}{p_i} \right) = k$$

INFLUENCE SUR LE BÉNÉFICE DE LA SURPRODUCTION ET DE LA SOUS-PRODUCTION

Les coûts de pénurie et de surproduction interviennent chaque fois que l'offre diffère de la demande.

Lorsque la demande est supérieure à l'offre on dit qu'il y a pénurie. Nous supposons ici que l'offre coïncide avec la production, écartant toute hypothèse de politique spéculative. De plus nous supposons que cette pénurie n'est pas générale et ne concerne que l'entreprise envisagée. Par conséquent, dans ce cas, la sous-production pénalise l'entreprise, en lui faisant perdre des clients mécontents de ne pas être servis, et à cause de l'effet d'entraînement dont parle F. Perroux, peut créer un climat psychologique très défavorable pour de futurs clients éventuels.

Les méfaits de la surproduction sont célèbres : ils engendrent des crises économiques. Nous nous bornerons à considérer, le cas le plus simple d'une entreprise où la surproduction peut être emmagasinée et vendue plus tard, soit au même prix, soit à un prix inférieur, de toute manière, que ce soit à cause du coût de stockage (entretien) ou des pertes éventuelles, l'effet est défavorable à l'entreprise. On peut, par des études statistiques évaluer le coût de la surproduction ou de la pénurie pour un produit donné.

Soit h_{1i} et h_{2i} les coûts unitaires de surproduction et de pénurie, et H_{1i} et H_{2i} les pertes totales dues respectivement à la surproduction et à la pénurie, du bien B_i , exprimées en unités quantitatives.

Utilisant les notations des chapitres précédents, nous pouvons écrire : $L_i = p_i V_i - c_i x_i - H_{i, 2i} \cdot h_{i, 2i}$ c'est-à-dire que le bénéfice relatif à la vente d'un produit i est égal au prix de la vente totale moins les frais fixes de production, et moins les pertes dues à la surproduction et ou à la pénurie.

D'après la définition que nous avons donnée de la fonction $V(x/r)$ nous pouvons exprimer la surproduction par :

$$H_1 = x - V,$$

la pénurie par :

$$H_2 = r - V.$$

Naturellement :

$$H_1 \neq 0 \implies H_2 = 0$$

$$\text{et } H_2 \neq 0 \implies H_1 = 0$$

1) Espérance de bénéfice, dans le cas de la surproduction, connaissant la distribution de la demande relative à un produit i :

$$EL_i = p_i EV_i - c_i x_i - h_{1i} \cdot H_{1i}$$

$$\text{soit : } EL_i = p_i EV_i - c_i x_i - h_{1i} (x_i - EV_i)$$

$$EL_i = (p_i + h_{1i}) EV_i - (c_i + h_{1i}) x_i$$

$$\text{ou encore : } EL_i = (p_i + h_{1i}) \int_0^{x_i} P_i(t) dt - (c_i + h_{1i}) c_i$$

Le résultat énoncé dans la proposition I demeure valable : il suffit de poser $p_i + h_{1i} = p'_i$ et $c_i + h_{1i} = c'_i$ et l'on détermine le niveau de production à l'optimum par la formule déjà établie :

$$P(x_i) = \frac{c'_i}{p'_i} = \frac{c_i + h_{1i}}{p_i + h_{1i}}$$

cette valeur ainsi déterminée pour x_i nous permettra de calculer la valeur maximale de EL_i .

Nous pouvons par conséquent généraliser la proposition I de la manière suivante :

PROPOSITION IV :

Si l'on donne une distribution de la demande d'un produit, soit $P_i(t)$, continue, $P_i(t) = \text{prob. } \{r_i \geq t\}$ connaissant le prix de vente unitaire p_i , et le coût de production unitaire c_i , ainsi que le coût de surproduction unitaire h_{1i} , on en déduit le niveau de production qu'il faudra atteindre afin d'obtenir l'espérance maximale de profit, au moyen de la formule :

$$P_i(x_i) = \frac{c_i + h_{1i}}{p_i + h_{1i}}$$

sous la condition : $0 \leq \frac{c_i + h_{1i}}{p_i + h_{1i}} \leq 1$

2) ESPÉRANCE DE BÉNÉFICE DANS LE CAS DE LA SOUS-PRODUCTION

connaissant la distribution de la demande relative à un produit :

Nous écrivons que l'espérance de bénéfice est égale à l'espérance du prix de vente moins les frais de production, moins la perte due à la sous-production ou pénurie :

soit : $EL_i = p_i EV_i - c_i x_i - h_{2i} \cdot H_{2i}$

ou encore :

$$EL_i = p_i EV_i - c_i x_i - h_{2i} [E(r_i) - EV_i]$$

$$EL_i = (p_i + h_{2i}) \cdot EV_i - c_i x_i - h_{2i} E(r_i)$$

$$\text{or } Er_i = \int_0^R P(t) dt$$

R étant la limite supérieure du volume des ventes.

Nous pouvons donc écrire :

$$EL_i = [p_i + h_{2i}] \cdot \int_0^{x_i} P(t) dt - c_i x_i - h_{2i} \int_0^R P(t) dt$$

or la quantité $h_{2i} \int_0^R P(t) dt$ étant une constante, nous avons

à l'optimum :

$$\frac{dEL_i}{dx_i} = 0 \Rightarrow [p_i + h_{2i}] \cdot P(x_i) - c_i = 0$$

$$\text{et } P(x_i) = \frac{c_i}{p_i + h_{2i}}$$

La valeur de x_i ainsi déterminée nous permettra ensuite le calcul de EL_i .

Nous pouvons par conséquent généraliser la proposition I :

PROPOSITION V :

Si l'on se donne une distribution de la demande d'un produit, soit $P_i(t)$, connaissant les prix de vente unitaires p_i et le coût de production unitaire c_i , ainsi que le coût unitaire de la surproduction h_{1i} , ou bien le coût unitaire de la pénurie h_{2i} , on obtient le niveau de production qu'il faudra atteindre afin d'obtenir l'espérance maximale de profit, au moyen des

$$\text{relations : } P(x_i) = \frac{c_i + h_{1i}}{p_i + h_{1i}}$$

ou bien : $\frac{c_i}{p_i + h_{2i}}$ selon qu'il s'agit de surproduction ou de pénurie avec comme conditions :

$$0 \leq \frac{p_i + h_{1i}}{c_i + h_{1i}} \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{c_i}{p_i + h_{2i}} \leq 1$$

*
**

Calcul de l'espérance maximale de profit, tenant compte des coûts de surproduction ou de pénurie.

Il s'agit d'une extension de la proposition II. Nous allons utiliser, pour traiter ce problème, la remarque suivante :

Remarque au sujet de la Proposition II :

On pourrait s'étonner que dans l'une et l'autre solution proposée on aboutisse à une valeur de x_i déterminée

$$\text{par } P_i(x_i) = \frac{p_j + c_i - c_j}{p_i + p_j}$$

c'est-à-dire que x_i semble ne pas dépendre de k , et l'on pourrait se demander si ayant calculé à l'aide de cette formule, les valeurs respectives de x_i et x_j on obtiendrait ou non $x_i + x_j = k$, autrement dit, existe-t-il une condition supplémentaire de compatibilité entre les prix et les coûts pour que le problème admette une solution ? Cette question est pour nous importante car nous serons obligés dans ce chapitre d'étudier le comportement de EW en fonction des variations de k .

En réalité, si l'on considère la méthode proposée, ce n'est qu'apparemment que k n'intervient pas. En effet, nous aurions pu tout aussi bien calculer u à partir du système II :

$$P_i(x_i) = \frac{c_i + u}{p_i} \Rightarrow x_i = F_i(u)$$

$$P_j(x_j) = \frac{c_j + u}{p_j} \Rightarrow x_j = F_j(u)$$

et la relation (a) $x_i + x_j = k$ entraîne : $F_i(u) + F_j(u) = k$ ce qui nous donne la valeur de u cherchée, et l'on voit ainsi apparaître évidemment la constante k .

Or nous avons préféré utiliser la relation :

$$(b) P_i(x_i) + P_j(x_j) = 1$$

qui nous donne, dans le cas général, un résultat plus explicite. Il convient de remarquer à ce sujet que la relation (b) déduite de (a) ainsi que nous l'avons vu, n'est valable justement que lorsque x_i et x_j sont liés par la relation (a).

(Relation (a) $r_i + r_j = k$).

Etant donné la relation (a) et la donnée $P_i(t)$ on peut en déduire P_j .

Réciproquement la donnée de (b) implique l'existence de (a) qui en somme intervient dans sa définition.

Ainsi pour la détermination de u on peut utiliser indifféremment l'une ou l'autre des relations (a) et (b) l'une étant plus commode que l'autre selon les cas envisagés.

De toute manière, il convenait de préciser qu'à chaque valeur de k on peut faire correspondre en général une seule valeur de EW . Tout dépend en définitive du nombre de solu-

tions de l'équation : $P_i(x_i) = \frac{p_j + c_i - c_j}{p_i + p_j}$

comme P_i est assujettie aux conditions :

$P_i(0) = 1$ et $P_i(k) = 0$ k représentant la borne supérieure de vente jamais atteinte par ailleurs

$$0 \leq P_i(t) \leq 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq k$$

En général $P_i(t)$ sera une fonction monotone constamment décroissante de 1 à 0 pour t croissant de 0 à k .

Par conséquent l'équation : $P_i(t) = \frac{p_j + c_i - c_j}{p_i + p_j}$ admet en

général une solution unique pourvu que $0 \leq \frac{p_j + c_i - c_j}{p_i + p_j} \leq 1$

On pourrait, bien entendu, imaginer une fonction $P_i(t)$ avec « paliers » dans l'intervalle $(0, k)$. Alors l'équation $P_i(x_i) =$ constante nous donnerait une infinité de valeurs pour x_i et à une valeur de k correspondrait une infinité de valeurs de EL_i — donc de EW .

Mais ces cas sont rares en pratique; en effet, dans la plupart des cas relatifs à l'économie de l'entreprise ou à l'économie nationale, plus l'on se fixe un objectif élevé pour le volume des ventes, moins grande est la probabilité de réalisation de cet objectif. De toute manière la méthode que nous allons proposer pourrait être étendue aussi aux cas d'exceptions précités.

1) Calcul de l'espérance maximale de profit, tenant compte du coût de surproduction dans le cas de demandes de produits substituables.

Au chapitre précédent, nous avons établi la formule :

$$EL_i = [p_i + h_i] \int_0^{x_i} P_i(t) dt - (c_i + h_{1,i}) \cdot x_i$$

Dans le cas de deux produits, B_i et B_j , nous aurons par conséquent :

$$(1) \quad EW = EL_i + EL_j = [p_i + h_{1,i}] \int_0^{x_i} P_i(t) dt + \\ + [p_j + h_{1,j}] \int_0^{x_j} P_j(t) dt - [c_i + h_{1,i}] x_i - [c_j + h_{1,j}] x_j$$

Mais par comparaison avec la démonstration présentée pour la proposition II, une difficulté supplémentaire s'introduit, par le fait que nous ne pouvons plus utiliser l'hypothèse que la production coïncide avec la demande, puisqu'au contraire l'on veut maintenant tenir compte d'un facteur de surproduction affectant les deux produits considérés. En d'autres termes, si nous avons toujours la relation $r_i + r_j = k$ (biens supplémentaires parfaits de destination) nous aurons cette fois : $x_i + x_j > k$

que nous pouvons écrire : $x_i + x_j = k + s$ (2)

s étant la surproduction totale de l'ensemble des deux produits, s étant exprimée en unités quantitatives. s est évidemment une estimation, un objectif fixé d'avance par les responsables des décisions qui se fixent ainsi une certaine « marge de sécurité ». Il peut être intéressant d'étudier l'espérance de profit en fonction des variations de s ; pour cela il faut connaître $P_i(t)$. Nous traiterons ce problème à titre d'exemple en choisissant pour $P_i(t)$ une fonction simple. Quant au problème général, il peut être résolu de la façon suivante :

$$EW(\max) \quad (1)$$

$$x_i + x_j = k + s = \text{constante} \quad (2)$$

Utilisant la deuxième solution de la proposition II nous obtenons :

$$P_i(x_i) = \frac{c'_i + u}{p'_i} \quad x_i = F_i(u) \quad (1)$$

$$\text{avec } c'_i = c_i + h_{1i} \quad p'_i = p_i + h_{1i}$$

$$P_j(x_j) = \frac{c'_j + u}{p'_j} \quad x_j = F_j(u) \quad (2)$$

avec $c'_j = c_j + h_{1j}$ et $p'_j = p_j + h_{1j}$

Nous déterminerons u par la relation (2).

$$F_i(u) + F_j(u) = k + s \quad (3)$$

Nous en déduisons x_i et x_j et ensuite EW(max).

2) Calcul de l'espérance maximale de profit tenant compte du coût de la pénurie, dans le cas de biens supplémentaires parfaits de destination.

Au chapitre précédent nous avons établi la formule :

$$EL_i = [p_i + h_{2i}] \int_0^{x_i} P_i(t) dt - c_i x_i - h_{2i} \int_0^{R_i} P(t) dt$$

Dans le cas de deux produits B_i et B_j nous aurons par conséquent :

$$EW = EL_i + EL_j$$

soit :

$$(1) \quad EW = [p_i + h_{2i}] \int_0^{x_i} P_i(t) dt + [p_j + h_{2j}] \int_0^{x_j} P_j(t) dt - c_i x_i - c_j x_j - h_{2i} \int_0^{R_i} P_i(t) dt - h_{2j} \int_0^{R_j} P_j(t) dt$$

Nous pouvons faire la même remarque que dans le cas de la surproduction : la relation des demandes de produits substituables $r_i + r_j = k$ n'a plus comme corollaire : $x_i + x_j = k$, autrement dit, nous envisageons le cas de biens supplémentaires parfaits de destination tels que leur demande globale ne coïncide pas avec la production.

Nous aurons cette fois : $x_i + x_j < k$ ou encore, si nous estimons une pénurie possible totale pour les deux produits égale à z , nous pouvons écrire $x_i + x_j = k - z$.

Nous avons donc à résoudre le système :

(1) EW(max)

(2) $x_i + x_j = k - z = \text{constante}$.

$$\text{Nous obtenons : } P_i(x_i) = \frac{c_i + u}{p_i + h_{2i}} \quad x_i = G_i(u) \quad (1')$$

$$\text{et } P_j(x_j) = \frac{c_j + u}{p_j + h_{2j}} \quad x_j = G_j(u) \quad (2)$$

On détermine u par :

$$G_i(u) + G_j(u) = K - z \quad (3')$$

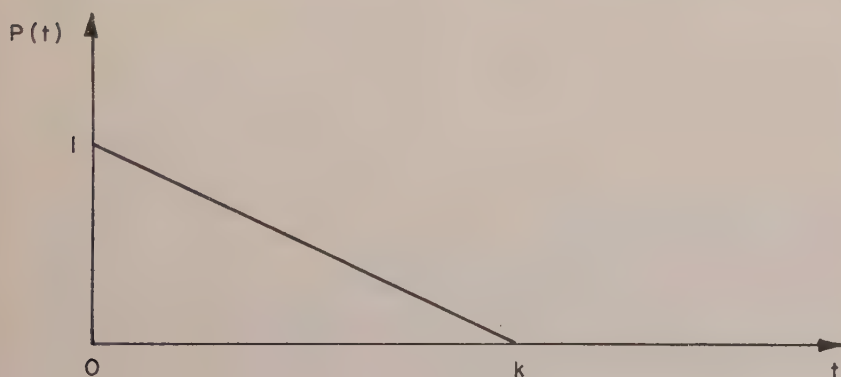
On reporte dans (1) les valeurs de x_i et x_j et on déduit $EW(\max)$.

PROPOSITION VI :

En conclusion de ce chapitre et avant de traiter un exemple de surproduction, nous pouvons dire que nous avons généralisé les résultats précédents et énoncé la proposition VI.

« Soit deux produits dont les demandes respectives sont liées par une relation de la forme $r_i + r_j = k$, si l'on connaît une distribution de la demande d'un seul des deux produits, les prix de vente, les coûts de production des deux produits, ainsi qu'une estimation du coût de surproduction ou du coût de pénurie, on détermine les niveaux de production qui rendent maximale l'espérance de profit au moyen du système (1)', (2)', (3)' ou du système (1), (2), (3). »

Exemple de calcul de l'espérance de profit, dans le cas de la surproduction et de biens supplémentaires parfaits de destination :



$$\text{soit } P_i(t) = 1 - \frac{t}{k}$$

$$x_i + x_j = k + s$$

$$\begin{aligned} EW &= (p_i + h_{ii}) \int_0^{x_i} P_i(t) dt + (p_j + h_{ij}) \int_0^{x_j} P_j(t) dt - \\ &- (c_i + h_{ii}) x_i - (c_j + h_{ij}) x_j \end{aligned}$$

Remarque :

Comme les demandes sont substituables, on a toujours

$$P_i(t) + P_j(k - t) = 1 \quad 0 \leq t \leq k$$

ou encore, posant $k - t = t'$ on obtient :

$$P_i(k - t') + P_j(t') = 1 \quad 0 \leq t' \leq k$$

mais t' varie dans le sens inverse de t

on peut écrire

$$P_j(t') = 1 - P_i(k - t') = 1 - \left[1 - \frac{k - t'}{k} \right] = \frac{t'}{k}$$

dans ce cas particulier : $P_i(t) = P_j(t)$

D'où :

$$\begin{aligned} EW &= [p_i + h_{ii}] \cdot \left[x_i - \frac{x_i^2}{2k} \right] + [p_j + h_{ij}] \left[x_j - \frac{x_j^2}{2k} \right] - \\ &- (c_i + h_{ii}) x_i - (c_j + h_{ij}) x_j \end{aligned}$$

Détermination des niveaux de production à l'optimum :

$$P_i(x_i) = \frac{c_i + h_{ii} + u}{p_i + h_{ii}} \quad P_j(x_j) = \frac{c_j + h_{ij} + u}{p_j + h_{ij}}$$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$x_i = k \left[1 - \frac{c_i + h_{ii} + u}{p_i + h_{ii}} \right] \quad x_j = k \left[1 - \frac{c_j + h_{ij} + u}{p_j + h_{ij}} \right]$$

u est déterminé par :

$$\begin{array}{ll} \text{posant} & c_i + h_{1i} = c'_i & p_i + h_{1i} = p'_i \\ & c_j + h_{1j} = c'_j & p_j + h_{1j} = p'_j \end{array}$$

$$2k - k \left[\frac{c'_i + u}{p'_i} + \frac{c'_j + u}{p'_j} \right] = k + s$$

$$\text{soit } k - s = k \left\{ \frac{c'_i}{p'_i} + \frac{c'_j}{p'_j} + \left[\frac{1}{p'_i} + \frac{1}{p'_j} \right] \cdot u \right\}$$

$$\text{on obtient : } u = \frac{\left(1 - \frac{s}{k}\right) \cdot p'_i p'_j - p'_j c'_i - p'_i c'_j}{p'_j + p'_i}$$

c'est-à-dire que u est une fonction linéaire de s ; par ailleurs comme on a :

$$x_i = k \left[1 - \frac{c'_i + u}{p'_i} \right] \quad \text{et} \quad x_j = k \left[1 - \frac{c'_j + u}{p'_j} \right]$$

remplaçant u par sa valeur, on peut obtenir x_i et x_j tous deux fonctions linéaires de s .

Par conséquent dans cet exemple simple EW peut s'exprimer en fonction d'un trinôme du second degré en s .

On pourra chercher à maximiser EW en fonction des variations de s , à condition, bien entendu, d'avoir au préalable déterminé un intervalle raisonnable de variation pour s et il se peut naturellement que le maximum du trinôme se trouve à l'extérieur de l'intervalle de variation considéré. De toute manière, le trinôme nous donnera le maximum cherché, compte tenu des restrictions.

III

Influence des coûts de surproduction ou de pénurie, sur l'espérance de bénéfice dans le cas d'une relation linéaire entre les demandes respectives de n produits.

1) Cas de la surproduction.

Nous pouvons poser le problème de la manière suivante :

$$EW(\max) = \sum_{i=1}^{i=n} EL_i \max$$

$$EW(\max) = \sum_{i=1}^{i=n} (p_i + h_{1,i}) \int_0^{x_i} P_i(t) dt - \sum_{i=1}^{i=n} (c_i + h_{1i}) x_i \quad (1)$$

$$\text{et} \quad \sum_{i=1}^n a_i x_i = k + s \quad (2)$$

En utilisant les mêmes notations que précédemment;

$$\text{on trouve : } P_i(x_i) = \frac{c_i + u a_i}{p_i} \Rightarrow x_i = F_i(u) \quad (1)$$

u est déterminé par (2) :

l'optimum en fonction de k et de z ainsi que des coûts divers donnés à l'avance.

PROPOSITION VII :

Nous pouvons par conséquent énoncer la proposition VII qui généralise les précédentes :

Soit n produits distincts, dont les demandes sont liées par une relation linéaire, si l'on connaît les distributions respectives de ces demandes, les coûts unitaires de production, de pénurie ou de surproduction, les prix de vente unitaires, on détermine les niveaux respectifs de production qui rendent maximale l'espérance de profit à l'aide des relations : (1)' et

(2)' ou (1). et (2). en supposant $\sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i = k - z$, ou $k + s$ respectivement.

Etude du Bénéfice $W(x)$ en fonction de la distribution marginale $P(t)$ — exprimant la demande aléatoire r dans le cas de la pénurie — pour un seul bien B .

Notations :	prix de vente unitaire : p coût unitaire de la pénurie : h coût de production unitaire : c
pour B :	

Nous avons calculé dans ce cas la production optimale par la formule : $P(x) = \frac{c}{p+h}$ (1)

Remarque :

La politique économique, c'est-à-dire la décision relative au niveau optimal de production ne dépend que du rapport $\frac{c}{p+h}$ l'estimation des conséquences de cette politique, c'est-à-dire l'espérance mathématique du bénéfice dépend des quantités respectives : c et $p+h$.

Autrement dit, à une politique correspond une infinité de conséquences possibles.

1) ETUDE DU BENEFICE DANS LE CAS D'UNE DISTRIBUTION DISCRETE DE LA DEMANDE.

r prend les valeurs successives $0 \leq y_1 \leq y_2 \dots \leq y_H$
avec les probabilités $0 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_H$

Nous avons d'après (1) :

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{s-1} < \frac{c}{p+h} < \varphi_s + \varphi_{s+1} + \dots + \varphi_H$$

De sorte que pour x on hésite entre y_{s-1} et y_s on fait :

$$x = \alpha y_{s-1} + \beta y_s$$

$$\alpha + \beta = 1 \quad \alpha \geq 0 \quad \beta \geq 0$$

$$\begin{aligned} W(x) = & \varphi_1 (py_1 - cx) + \varphi_2 (py_2 - cx) + \\ & + \dots + \varphi_{s-1} (py_{s-1} - cx) \\ & + \varphi_s [px - h(y_s - x) - cx] + \varphi_{s+1} [px - h(y_{s+1} - x) - cx] \\ & + \dots + \varphi_H [px - h(y_H - x) - cx] \end{aligned}$$

seuls varient α et β

$$\frac{dW}{d\alpha} = -c(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{s-1})y_{s-1} +$$

$$+ (p + h - c)(\varphi_s + \varphi_{s+1} + \dots + \varphi_H) \cdot y_{s-1}$$

$$\frac{dW}{d\beta} = -c(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{s-1})y_s +$$

$$+ (p + h - c) \cdot (\varphi_s + \varphi_{s+1} + \dots + \varphi_H) y_s$$

$$\frac{dW}{d\alpha} = \left[-c \sum_{i=1}^H \varphi_i + (p + h)(\varphi_s + \varphi_{s+1} + \dots + \varphi_H) \right] y_{s-1}$$

$$\frac{dW}{d\beta} = \left[-c \sum_{i=1}^H \varphi_i + (p + h)(\varphi_s + \varphi_{s+1} + \dots + \varphi_H) \right] y_s$$

$$\frac{dW}{d\alpha} = \left[-c + (p + h) \sum_{i=s}^H \varphi_i \right] y_{s-1}$$

$$\frac{dW}{d\beta} = \left[-c + (p + h) \sum_{i=s}^H \varphi_i \right] y_s$$

$$dW = \frac{\delta W}{\delta \alpha} d\alpha + \frac{\delta W}{\delta \beta} d\beta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[-c + (p + h) \sum_{i=s}^H \varphi_i \right] y_{s-1} d\alpha +$$

$$+ \left[-c + (p + h) \sum_{i=s}^H \varphi_i \right] y_s d\beta = 0$$

$$\alpha + \beta = 1 \Rightarrow d\alpha + d\beta = 0 \Rightarrow d\beta = -d\alpha$$

$$\text{D'où } dW = \left[-c + (p + h) \sum_{i=s}^H \varphi_i \right] \cdot \left[y_{s-1} - y_s \right] d\alpha$$

$$\text{et } \frac{dW}{d\alpha} = \left[-c + (p + h) \sum_{i=s}^H \varphi_i \right] \cdot \left[y_{s-1} - y_s \right]$$

$$= \left[c - (p + h) \sum_{i=s}^H \varphi_i \right] \cdot \left[y_s - y_{s-1} \right]$$

Faisant l'hypothèse :

$$c - (p + h) \sum_{i=1}^H \varphi_i > 0$$

cela signifie que $\frac{dW}{d\alpha} > 0$

comme par ailleurs $x = (y_{s-1} - y_s) \alpha + y_s$

$$\text{on a } \frac{dx}{d\alpha} < 0$$

Par conséquent le maximum de W est obtenu pour le maximum de α qui correspond au minimum de $y_{s-1} \leq x \leq y_s$

On choisira donc pour x la borne inférieure y_{s-1}

$$\begin{aligned} W(x) = & \varphi_1 [py_1 - cy_{s-1}] + \varphi_2 [py_2 - cy_{s-1}] + \dots + \\ & + \varphi_{s-1} [py_{s-1} - cy_s] + \varphi_s [(p + h - c) y_{s-1} - hy_s] + \\ & + \varphi_H [(p + h - c) y_{s-1} - hy_H] \end{aligned}$$

Supposons donnés les φ_i , p , c , h et aussi la valeur moyenne

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^H \varphi_i y_i$$

Le maximum de $W(x)$ est alors obtenu par la résolution d'un programme linéaire, mais on voit que si l'on forme :

$$W(x) - (p - c)\bar{y} \quad \text{on obtient :}$$

$$\begin{aligned} W(x) - (p - c)\bar{y} = & \varphi_1 [py_1 - cy_{s-1} - (p - c)y_1] + \dots \\ & + \varphi_{s-1} [py_{s-1} - cy_{s-1} - (p - c)y_{s-1}] + \\ & + \varphi_s [(p + h - c) y_{s-1} - hy_s - (p - c)y_s] + \\ & + \dots + \varphi_H [(p + h - c) y_{s-1} - hy_H - (p - c)y_H] \\ = & \varphi_1 c [y_1 - y_{s-1}] + \dots + \varphi_s (p + h - c) [y_{s-1} - y_s] \\ & + \dots + \varphi_H (p + h - c) [y_{s-1} - y_H] \end{aligned}$$

c'est-à-dire que dans le cas général où $p + h - c > 0$ on a

$$W(x) - (p - c)\bar{y} < 0$$

Par conséquent l'incertitude introduit toujours une perte de bénéfice par rapport au cas où y certain serait égal à sa

valeur moyenne. Cela veut dire qu'il vaut mieux un bénéfice moyen certain, qu'un bénéfice maximum aléatoire. Ceci rejoint le vieil adage : « Un tien vaut mieux que deux tu l'auras ». Cette conclusion demeure valable dans le cas continu. Il est évidemment important de savoir dans quelles conditions le bénéfice $W(x)$ est positif.

Pour cela il est commode de repasser au cas continu et de faire une hypothèse sur la densité de probabilité de r : soit $f(r)$.

On voit que x étant choisi à l'optimum, le champ de variation de r est partagé en deux parties :

$$\text{l'une de probabilité } 1 - \frac{c}{p+h} = \int_0^x f(r) dr = R_1$$

où la valeur de moyenne de r est :

$$\bar{r}_1 = \frac{\int_0^x r f(r) dr}{\int_0^x f(r) dr}$$

l'autre de probabilité :

$$\frac{c}{p+h} = \int_0^\infty f(r) dr = R_2$$

où la valeur moyenne de r est :

$$\bar{r}_2 = \frac{\int_x^\infty r f(r) dr}{\int_x^\infty f(r) dr}$$

Nous avons alors :

$$W(x) = pR_1 \bar{r}_1 - cR_1 x + R_2 [p+h-c] x - hR_2 \bar{r}_2$$

$$W(x) = pR_1 \bar{r}_1 + xR_2 (p+h) - (cx + hR_2 \bar{r}_2)$$

On voit que r_2 doit être assez petit pour que $W(x)$ puisse être positif ce qui exige que la variable r ne soit pas trop dispersée, si $h = 0$ il y a toujours bénéfice pour $p > c$.

$$\text{Tenant compte de } R_1 = \frac{p + h - c}{p + h}$$

$$R_2 = \frac{c}{p + h}$$

On obtient :

$$W(x) = p \frac{p + h - c}{p + h} \bar{r}_1 + x \frac{c}{p + h} \cdot (p + h) - cx - \\ - h \frac{c}{p + h} \bar{r}_2$$

$$W(x) = \frac{p(p + h - c) \bar{r}_1 - ch \bar{r}_2}{p + h}$$

$W(x)$ est > 0 si

$$\bar{r}_1 > \frac{hc}{p(p + h - c)} = -\frac{h}{p} \frac{R_2}{R_1} \bar{r}_2$$

ou encore :

$$pR_1 \bar{r}_1 > hR_2 \bar{r}_2$$

forme qui paraît la plus adaptée à la discussion.

Elle donne en particulier la borne supérieure de h au-delà de laquelle il est impossible de faire un bénéfice :

$$h = p \frac{R_1 \bar{r}_1}{R_2 \bar{r}_2}$$

si on se donne x , p , R_1 et R_2 et par conséquent $\bar{r}_1$ et $\bar{r}_2$ on obtient la borne de h en tenant compte de $p + h = \frac{c}{R_2}$

$$\text{d'où } h = \left[\frac{c}{R_2} - h \right] \frac{R_1 \bar{r}_1}{R_2 \bar{r}_2}$$

$$h \left[1 + \frac{R_1 \bar{r}_1}{R_2 \bar{r}_2} \right] = \frac{c}{R_2} \frac{R_1 \bar{r}_1}{R_2 \bar{r}_2}$$

$$h = \frac{cR_1 \bar{r}_1}{R_2 (R_1 \bar{r}_1 + R_2 \bar{r}_2)}$$

ORDONNANCEMENT EN VUE D'UNE DEMANDE ALEATOIRE

1) Considérons l'exemple suivant emprunté à Dantzig :

Une usine dispose de 100 articles qui peuvent être envoyés à un magasin au prix de 1 franc pièce, en vue d'une demande aléatoire r . Dans le cas où la demande dépasse l'offre, de façon à répondre à la demande non satisfaite, on fait appel soit à des négociants possédant des stocks invendus, soit même à des concurrents pour leur acheter les articles manquants. On suppose que le coût de ces articles est de deux francs pièce.

Nous nous plaçons ici, dans le cas idéal d'une économie en pleine expansion, où joue la libre concurrence, et où l'on accepte une perte marginale de manière à conserver sa clientèle.

Mise en équation du problème :

1) NOTATIONS :

x = nombre d'articles envoyés de l'usine
 y = nombre d'articles stockés en usine
 z = nombre d'articles achetés en supplément
 s = excès de l'offre sur la demande
 r = demande aléatoire
 c = coût total

Nous obtenons le système suivant :

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 100 \\ x + z - s = r \\ x + 2z = c \end{array} \right. \quad x, y, z, s, \geq 0$$

Il s'agit là d'un problème en deux étapes.

Dans un premier stade, on décide de l'importance du stock

qu'il faut conserver à l'usine, dans le deuxième stade intervient l'inconnue de la demande.

Cet exemple illustre toute une classe de problèmes de décisions successives.

Nous nous limiterons dans ce chapitre aux problèmes à deux étapes.

Nous traiterons d'abord le cas classique en nous inspirant des solutions proposées par H. Scarf, Dantzig, Madansky, Reiter, Theil, Simon, et ensuite nous envisagerons le cas de produits dont les demandes respectives sont liées, par une relation de substituabilité. La structure de ces problèmes à deux étapes est la suivante :

Dans une première étape on détermine $x_i \geq 0$, $u_i \geq 0$ tels que :

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} x_i = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_{li} x_i = u_l \quad (l = 1, 2, \dots, p)$$

où les stocks initiaux b_j pour $j = 1, 2, \dots, m$ sont connus.

Les $x_i \geq 0$ représentent des décisions au premier stade, résultant en spécifications de u_i à rendre disponibles pour un second stade.

Au second stade, on détermine les quantités z_k et s_k telles que :

$$z_k - s_k + u_k = r_k \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

où r_k est la demande inconnue dont on connaît la distribution de probabilités, z_k représente la pénurie de produit et s_k l'excès d'offre par rapport à la demande.

Supposant pour commencer que l'on ne complète pas l'offre en cas de pénurie, par des achats extérieurs, le coût total est de la forme :

$$C = \sum_{i=1}^{i=n} c_i x_i - \sum_{l=1}^{l=m} p_l (r_l - z_l)$$

où $z_l = 0$ où $u_l \geq r_l$

c_i est le coût de fabrication du produit i ; $p_i \geq 0$ est le prix de vente.

Ainsi il est toujours payant de vendre autant de u_i que possible de telle sorte que $(r_i - z_i) = \text{Min}(u_i, r_i)$

$$\text{et } C = \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{i=1}^m p_i \text{Min}(u_i, r_i)$$

Il est clair que C dépend des choix de x_i et de u_i décidés en un premier stade et de la demande aléatoire r_i , x_i et u_i étant fixés, l'espérance mathématique de C est donnée par :

$$EC = \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{i=1}^m p_i E_{\text{min}}(u_i, r_i)$$

Comme l'espérance mathématique de $\text{Min}(u_i, r_i)$ dépend de u_i nous poserons $N_i(u_i) = E_{\text{min}}(u_i, r_i)$

Etant donné la distribution de probabilités de la demande r_i , on peut en déduire facilement la fonction $N_i(u_i)$.

Exemple :

Supposons $r_i = 1, 2, 3$, avec probabilités

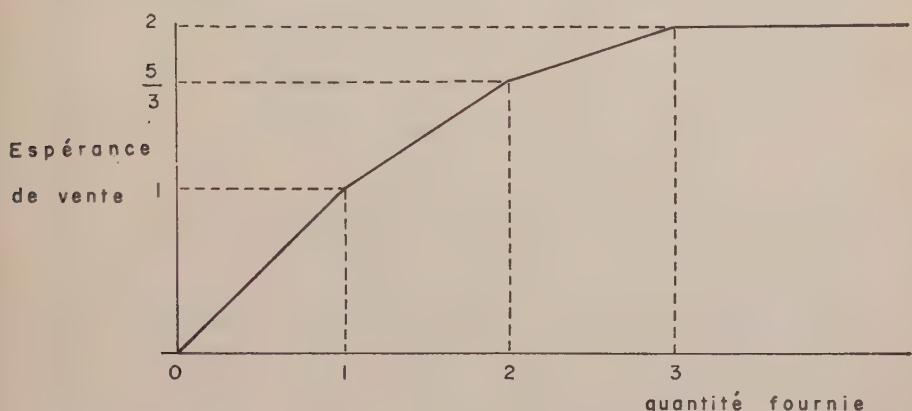
$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$, respectivement, on détermine $N_i u_i$ de la manière suivante :

Quantité fournie (u_i)	Quantité vendue $r_i - z_i = \text{Min}(u_i/r_i)$			Espérance de vente : $N_i u_i$
	$r_i = 1$	$r_i = 2$	$r_i = 3$	
$u_i = 0$	0	0	0	0
$0 < u_i < 1$	u_i	u_i	u_i	u_i
$u_i = 1$	1	1	1	1
$1 < u_i < 2$	1	u_i	u_i	$\frac{1}{3} + \frac{2u_i}{3}$

Stratégie en face d'une demande aléatoire

$u_1 = 2$	1	2	2	$\frac{5}{3}$
$2 < u_1 < 3$	1	2	u_1	$1 + \frac{u_1}{3}$
$u_1 = 3$	1	2	3	2
$3 < u_1$	1	2	3	2

Représentation graphique :



Remarque :

On notera la différence des points de vue de von Piesch et Dantzig dans leur manière d'exprimer les ventes effectivement réalisées. Dans la conception de von Piesch la fonction $V(x/r)$ représente le volume des ventes effectivement réalisées, tenant compte de la production et de la distribution de probabilités des ventes. Dantzig, lui, introduit d'abord la notion de quantité fournie u différente en général de la production, car on envisage un premier stockage en usine, il y a là une analyse plus poussée du réel, ensuite, il considère directement les variations de $N(u)$. Cette deuxième démarche est surtout avantageuse dans le cas d'une demande dont la dis-

tribution de probabilités est discrète. Nous rappelons à ce sujet les théorèmes de H. Scarf :

I) « L'espérance mathématique du coût total, dans le cas d'une demande aléatoire discrète, est une fonction convexe séparable :

$$EC = \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{l=1}^m p_l N_l(u_l)$$

où $N_l(u_l)$ est linéaire par morceaux et dont la pente entre deux demandes successives est égale à la probabilité de dépasser la plus faible des deux. »

II) Pour minimiser l'espérance de coût, on devra résoudre le problème de programmation convexe suivant :

$$(1) \quad EC(\min) = \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{l=1}^m p_l N_l(u_l)$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n a_{li} x_i = u_l \quad (l = 1, 2, \dots, p)$$

$$(4) \quad x_j, u_l \geq 0$$

Démonstration de (I) :

r ne peut prendre que les valeurs successives :

$$k_0 \leq k_1 \leq k_2 \dots \leq k_h$$

avec les probabilités : $v_0, v_1, v_2, \dots, v_h$

et la relation $\sum_{i=0}^h v_i = 1$

par ailleurs $\text{Min}(u, r) = u \quad \text{si} \quad r > u$
 $\text{Min}(u, r) = r \quad \text{si} \quad r \leq u$

Supposons $k_{j-1} \leq u < k_j$

alors

$$N(u) = u \text{Prob}(r > u) + \text{Prob}(r \leq u) E(r|r \leq u)$$

soit

$$N(u) = u [v_j + v_{j-1} + \dots + v_h] + k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_{j-1} v_{j-1}$$

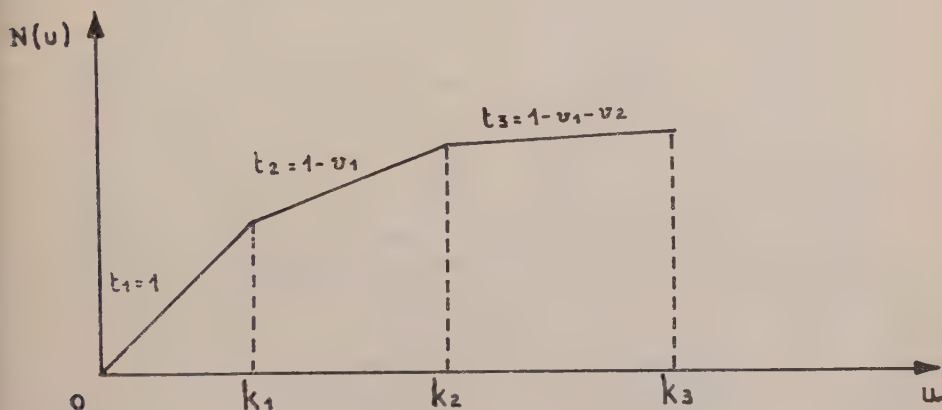
$$N(u) = u [1 - v_1 - v_2 - \dots - v_{j-1}] + k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_{j-1} v_{j-1}$$

pour $j = 1$ nous obtenons :

$$N(u) = u [1 - v_0] + k_0 v_0$$

Définissant $v_0 = 0 \Rightarrow N(u) = u$
pour $0 < u < k_1$

Ainsi $N(u)$ est une ligne brisée passant par l'origine, la pente initiale t_1 est 1 jusqu'à $u = k_1$, ensuite la pente t_2 jusqu'à $u = k_2$ a pour valeur $1 - v_1$ et ainsi de suite.



A cause de ces pentes décroissantes on peut dire que :
— $N(u)$ est convexe au sens de Scarf-Dantzig.

Remarque :

Nous pouvons immédiatement essayer d'étendre ce résultat au cas où pour pallier à une pénurie on effectuerait des achats à l'extérieur.

En effet rien n'est changé aux contraintes (2), (3), (4), mais il faut tenir compte dans la fonction objectif des éléments nouveaux suivants.

Lorsque la demande est supérieure à l'offre, on a :

$$r - u \neq 0 = z$$

z représente la quantité qu'il faudra acheter à l'extérieur et par conséquent vendre à un prix supérieur aux ventes habituelles pour conserver la même marge bénéficiaire.

(De façon à ne pas heurter la clientèle, on peut leur faire payer ce prix élevé, indirectement, par exemple en accordant un délai de paiement moins long) ou alors accepter de réduire la marge bénéficiaire en vue de conserver la clientèle.

Soit q_1 le prix de vente se référant à la quantité z , la fonction objectif s'écrit :

$$EC(\min) = \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{l=1}^m p_l N_l(u_l) - \sum_{l=1}^m q_l E z_l$$

$$\text{or } z_l = r_l - u_l = r_l - \text{Min}(u_l/r_l)$$

$$E z_l = E r_l - E \text{Min}(u_l/r_l) = E r_l - N_l(u_l)$$

$$\text{or } E r_l = \sum_{i=1}^h r_i v_i$$

v_i étant la probabilité de r_i (nous supposons connue la distribution de probabilité, discrète de r_i) par conséquent :

$$E r_l = \sum_{i=1}^h r_i v_i = \text{constante} = A_l$$

et la fonction objectif s'écrit :

$$\begin{aligned} EC(\text{Min}) &= \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{l=1}^m p_l N_l(u_l) - \sum_{l=1}^m q_l A_l - N_l(u_l) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{l=1}^m (p_l - q_l) N_l(u_l) - \sum_{l=1}^m q_l A_l \end{aligned}$$

constante

1) $q_1 > p_1$ ceci correspond au cas où l'on augmente le prix de vente de façon à ne pas diminuer le bénéfice ; alors la proposition de Scarf-Dantzig ne s'applique pas :

$$- \sum_{l=1}^m (p_l - q_l) N_l(u_l) \text{ n'est pas convexe.}$$

- 2) $p_1 \geq q_1$ — ceci correspond au cas où l'on accepte de réduire la marge bénéficiaire pour les produits achetés à l'extérieur.

Remarque :

Dans le cas particulier où $p_1 = q_1$ la fonction objectif se réduit à une fonction linéaire :

$$EC(\text{Min}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{l=1}^m q_l A_l$$

au cas, bien entendu, où $p_1 = q_1$ pour tous les produits ($l = 1, 2, \dots, p$) . de toute manière pour $p_1 \geq q_1$ la proposition demeure valable.

Nous pouvons par conséquent donner une première généralisation du théorème de H. Scarf.

PROPOSITION (1) : VIII

« L'espérance mathématique du coût total, dans le cas d'une demande aléatoire discrète, et tenant compte d'une politique d'achats complémentaires en cas de sous-production est une fonction convexe séparable au sens de Dantzig, moyennant la condition $p_1 \geq q_1$; et nous avons :

$$EC(\text{Min}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{l=1}^m (p_1 - q_1) N_l(u_l) - B$$

où $N_l(u_l)$ est linéaire par morceaux et dont la pente entre deux demandes successives est égale à la probabilité de dépasser la plus faible demande des deux;

$$\text{où } B = \sum_{l=1}^m q_l A_l = \sum_{l=1}^m q_l E r_l = \sum_{l=1}^m q_l \left[\sum_{i=1}^{l=h} r_i v_i \right]$$

où q_1 est le prix de vente déterminé au second stade du problème tel que $q_1 \leq p_1$. »

PROPOSITION (2) : IX

Pour minimiser l'espérance de coût, on devra résoudre le problème de programmation convexe suivant :

$$(1) \quad EC(\text{Min}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{i=1}^m (p_i - q_i) N_i(u_i) - B.$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n \bar{a}_{il} x_i = u_l \quad (l = 1, 2, \dots, p)$$

$$(4) \quad x_i, u_l \geq 0$$

$$(5) \quad B = \sum_{j=1}^m q_j \left[\sum_{l=1}^h r_l v_l \right]$$

ORDONNANCEMENT EN VUE DE DEMANDES ALEATOIRES SUBSTITUABLES

Reprenant les notations du chapitre précédent, nous allons traiter le même problème, en y ajoutant la condition de substituableté envisagée tout au long de cette étude; soit :

$$r_i + r_j = \text{constante} = K$$

c'est-à-dire que dans l'ensemble du système considéré au chapitre précédent, parmi les n produits distincts dont les quantités respectives sont déterminées pour la vente et l'emmagasinage à l'aide d'une programmation convexe, il se trouve deux produits, au sujet desquels on dispose de renseignements complémentaires : à savoir, que les demandes relatives à ces produits sont liées par la relation

$$r_i + r_j = K$$

On notera que ce problème est plus général que celui faisant l'objet de la proposition VI, dans la mesure où ici, nous considérons deux étapes successives dans la politique de vente (production et emmagasinage) et où l'on tient compte de la politique générale de l'entreprise, supposée à production diversifiée.

Le problème sera cependant simplifié par le fait que, dans ce chapitre, nous supposons les distributions de probabilités des ventes discrètes.

Ce cas est d'ailleurs assez fréquent dans les problèmes pratiques de l'entreprise, où le service des études de marché commence par établir des distributions de fréquence lesquelles ne sont pas toujours susceptibles d'être représentées même approximativement par des fonctions continues de type classique.

Par ailleurs, dans ce chapitre, nous n'imposerons pas de conditions de liaison entre les productions des biens supplémentaires parfaits de destination comme nous l'avons fait dans les chapitres précédents, ce qui restreignait la généralité de la méthode d'un point de vue mathématique.

Mise en équation du problème :

Les conditions (2), (3), (4), ne changent pas.

La condition $r_1 + r_j = K$ n'affecte que les quantités fournies u_1 .

Nous supposons que l'on ne complète pas l'offre en cas de pénurie par des achats extérieurs.

Le coût total est de la forme :

$$C = \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{l=1}^m p_l \text{Min} (u_l/r_l)$$

L'espérance mathématique de C est donnée par :

$$\begin{aligned} EC = \sum_{i=1}^n c_i x_i - [p_1 N_1 (u_1) + p_2 N_2 (u_2)] - \\ - \sum_{l=3}^m p_l N_l (u_l) \end{aligned}$$

supposant $r_1 + r_2 = K$ ce qui signifie que si r_1 prend la valeur k_1 avec la probabilité v_1 , r_2 prendra la valeur $K - k_1$ avec la même probabilité v_1 .

Supposons $k_{j-1} \leq u_1 < k_j$

$$\text{alors } N_1(u_1) = u_1 \left[1 - \sum_{i=1}^{j-1} v_i \right] + \sum_{i=1}^{j-1} k_i v_i$$

(pour $j = 0, 1, 2, \dots, h$)

Supposons $K - k_j < u_2 \leq K - k_{j-1}$

$$\text{alors } N_2(u_2) = u_2 \cdot \text{Prob}(r_2 \geq u_2) + \\ + \text{Prob}(r_2 < u_2) \cdot E(r_2 | r_2 < u_2)$$

$$\text{soit } N_2(u_2) = u_2 [v_{j-1} + v_{j-2} + \dots + v_1] + \\ + (K - k_j) v_j + (K - k_{j+1}) v_{j+1} + \\ + \dots + (K - k_h) v_h$$

$$\text{et } N_2(u_2) = u_2 \sum_{i=1}^{j-1} v_i + K \sum_{i=j}^h v_i - \sum_{i=j}^h k_i v_i$$

On note que $N_2(u_2)$ s'exprime à partir des données qui déterminent $N_1(u_1)$ et tenant compte de la relation $r_1 + r_2 = K$

On vérifie que EC est convexe, séparable.

Par ailleurs, la pente de $N_1(u_1)$ entre deux demandes successives du bien 1 plus la pente de $N_2(u_2)$ entre les deux demandes du bien 2, successives et respectivement supplémentaires parfaites du bien 1 est égale à 1; or nous avons vu (théorème de Scarf) que la pente entre deux demandes successives est égale à la probabilité de dépasser la plus faible des deux.

Nous retrouvons là une propriété déjà établie dans le cas des demandes de produits substituables aux distributions continues :

$$r_1 + r_2 = K$$

$$\Rightarrow \text{prob} \{r_1 > t\} + \text{prob} \{r_2 > K - t\} = 1$$

PROPOSITION X :

En conclusion :

Nous pouvons énoncer la proposition X : l'espérance mathématique du coût total dans le cas d'une demande aléatoire

discrète, lorsque les demandes de deux biens sont liées par la relation $r_1 + r_2 = K$

est une fonction convexe séparable :

$$EC = \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{i=1}^m p_i N_i(u_i)$$

où $N_i(u_i)$ est linéaire par morceaux et dont la pente entre deux demandes successives est égale à la probabilité de dépasser la plus faible des deux à la condition que si

$$N_1(u_1) = u_1 \left(1 - \sum_{i=1}^{j-1} v_i\right) + \sum_{i=1}^{j-1} k_i v_i \quad j = 0, 1, 2, \dots, h$$

on doit avoir nécessairement :

$$N_2(K - u_1) = (K - u_1) \sum_{i=1}^{j-1} v_i + K \sum_{i=j}^h v_i - \sum_{i=j}^h k_i v_i$$

PROPOSITION XI :

On peut également énoncer la proposition XI :

« Pour minimiser l'espérance de coût lorsque $r_1 + r_2 = K$ on devra résoudre le problème de programmation convexe suivant :

$$(1) \quad EC(\min) = \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{i=1}^m p_i N_i(u_i)$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n \bar{a}_{1i} x_i = u_1 \quad (l = 1, 2, \dots, p)$$

$$(4) \quad x_i, u_i \geq 0$$

$$(5) \quad N_2(K - u_1) = (K - u_1) \sum_{i=1}^{j-1} v_i + K \sum_{i=j}^h v_i - \sum_{i=j}^h k_i v_i$$

$j = 0, 1, 2, \dots, h$

APPROCHE STOCHASTIQUE DE LA SUPPLEMENTARITE

Dans la dernière partie de cette étude nous avons toujours comme objectif la détermination d'une politique économique. C'est-à-dire, après avoir, à l'aide d'enquêtes statistiques, évalué la demande, sous forme de fonction aléatoire, il s'agit de calculer l'offre optimale compte tenu de l'utilité des biens économiques, des coûts de pénurie et de surproduction, et de liaisons entre offres et demandes exprimant complémentarité technique ou complémentarité de provenance et de destination.

Jusqu'à présent nous n'avons envisagé que la complémentarité ou complémentarité parfaite. Il en résultait du point de vue mathématique, des contraintes linéaires entre les variables de choix exprimant l'offre et les variables aléatoires exprimant la demande.

Dans l'essai de généralisation que nous proposons, le problème mis en équation se présente sous la forme d'un programme non linéaire stochastique. La méthode proposée permet de transformer ce programme non linéaire stochastique en un programme déterministe convexe à contraintes linéaires, c'est-à-dire que nous aboutissons à une formulation classique soluble, moyennant certaines conditions, en général vérifiées du point de vue économique. Nous donnons, de plus, l'expression mathématique de ces conditions.

Notations :

$B_1, B_2, \dots B_n$ = qualifications de biens

$r_1, r_2, \dots r_n$ = demandes respectives de ces biens

$x_1, x_2, \dots x_n$ = productions ou offres respectives de ces biens

V_i = vente de B_i

$S_i = x_i - V_i$ = surproduction de B_i

$M_i = r_i - V_i$ = manque de B_i

c_i = coût de production unitaire normal de B_i

p_i = prix de vente unitaire de B_i

σ_i = charge unitaire de surproduction affectant B_i

μ_i = pénalité unitaire de manque affectant B_i

$C_i = c_i + \sigma_i$ = coût théorique unitaire de B_i

$P_i = p_i + \sigma_i + \mu_i$ = prix de vente théorique unitaire de B_i

$x_i = f_{ij}(x_j)$ signifie que B_i est fonction supplémentaire de provenance de B_j

$r_i = \Psi_{ij}(r_j)$ signifie que B_i est fonction supplémentaire de destination ou fonction complémentaire technique de B_j

F = matrice rectangulaire de format $(m \times n)$ à coefficients constants

X = vecteur colonne d'ordre $(n \times 1)$ des variables de production

K = matrice colonne d'ordre $(m \times 1)$ à coefficients constants

N = ensemble des nombres entiers de 1 à n

$\Theta = [\Theta_{ij}]$ = matrice carrée Booléenne d'ordre n

$\bar{w}$ = valeur moyenne ou espérance mathématique.

Hypothèse III :

$V_i = \text{Min} \{r_i, x_i\}$ ce qui équivaut à $S_i \geq 0, M_i \geq 0, S_i M_i = 0$

D'autre part pour B_i , r_i ne peut prendre que les valeurs y_{hi} , ($h = 1, 2, \dots H$) avec les probabilités φ_{hi} respectivement et

la relation $\sum_{h=1}^{h=H} \varphi_{hi} = 1$; l'on cherche à rendre maximale la

valeur moyenne du profit ou de l'utilité totale $\sum_{i=1}^n \bar{\omega}_i$, le profit partiel $\bar{\omega}_i$ étant défini pour B_i par :

$$\bar{\omega}_i = p_i V_i - c_i x_i - \sigma_i S_i - \mu_i M_i$$

On considère le problème suivant :

$$\text{Max} \left\{ \sum_{i=1}^n \pi_i \bar{\omega}_i = \sum_{i=1}^n \pi_i (p_i V_i - c_i x_i - \sigma_i S_i - \mu_i M_i) \right\}$$

Compte tenu de :

$$(1) \quad \begin{cases} \Theta_{ij} [x_i - f_{ij}(x_j)] = 0 \\ \Theta_{ij} [r_i - \Psi_{ij}(r_j)] = 0 \end{cases}$$

$$\Theta_{ij} = 1 \iff \begin{cases} \Theta_{ik} = 0 \quad \forall k \neq i \\ \Theta_{ik} = 0 \quad \forall k \neq j \\ \Theta_{js} = 0 \quad \forall s \end{cases} \quad s, i, j, k \in N$$

$$FX \geq K \text{ (resp. } \leq K) \iff \forall x_i \neq 0 \in X \implies \Theta_{ij} = 0 \quad \forall j$$

$$X \geq 0$$

Remarque :

x_i est la variable de choix — r_i doit vérifier les hypothèses III* — c'est-à-dire r_i est une variable aléatoire.

Il s'agit d'un problème stochastique : maximiser une fonction économique exprimée en valeur moyenne, où interviennent des variables aléatoires ou non.

($V_i = \text{Min} \{r_i, x_i\}$ - cf. Hypothèses III), ces variables étant assujetties à des contraintes linéaires : $FX \geq K$ et des contraintes non linéaires d'un type particulier (les fonctions $f_{ij}(x_j)$ et $\Psi_{ij}(r_j)$ sont des fonctions d'une variable, continues, monotones — constamment croissantes ou décroissantes).

L'objectif est de transformer ce problème stochastique en un problème déterministe où n'interviendront plus que les inconnues x_i , où il n'y aura plus que des contraintes linéaires

* cf : Bibliographie — C.J. Willard — « Stratégie en face d'une demande aléatoire », C. R. Acad. Sc.

et où la fonction économique sera « convexe séparable » au sens de Scarf-Dantzig. (Cf. problèmes à 2 étages - Applications et prolongements de la programmation linéaire - G.B. Dantzig - trad. Dunod - p. 376-78). La solution d'un tel problème : fonction économique convexe et contraintes linéaires est classique. (Cf. par ex. ch. 15-3 du livre précité.) Par conséquent notre propos est simplement de montrer comment on peut transformer le problème (1) stochastique, non linéaire, en un problème déterministe où la fonction économique serait convexe, et les contraintes linéaires. La méthode proposée, cependant, ne permet pas toujours d'aboutir au résultat cherché : il faut que certaines conditions soient remplies.

Ces conditions sont relatives aux divers coefficients : p_i , c_i , σ_i , μ_i , aux fonctions f_{ij} et Ψ_{ij} ainsi qu'à Θ_{ij} , elles sont assez larges cependant puisqu'elles s'expriment sous forme d'inégalités. Il est d'ailleurs intéressant de constater que ces inégalités traduisent une réalité économique. Dans le développement qui suit, nous demeurons en dehors du point de vue économique.

I

Dans une première étape nous allons traiter le problème plus simple suivant :

$$1) \text{ Max } \sum_{i=1}^n \pi \omega_i = \text{Max } \sum_{i=1}^n \pi [p_i v_i - c_i x_i - \sigma_i S_i - \mu_i M_i]$$

$$FX \geq K$$

$$X \geq 0$$

Nous voulons transformer ce problème stochastique à contraintes linéaires en un problème déterministe où la fonction objective serait convexe séparable au sens de Scarf-Dantzig.

Par hypothèse :

r_i prend les valeurs successives : $0 \leq y_{1i} \leq y_{2i} \dots \leq y_{Hi}$
avec les probabilités : $0, \varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \dots \varphi_{Hi}$

et l'on a la relation : $\sum_{h=1}^H \varphi_{hi} = 1$

et $V_i = \text{Min } \{r_i, x_i\}$ avec $\left| \begin{array}{ll} \text{Min } \{r_i, x_i\} = x_i & \text{si } r_i > x_i \\ \text{Min } \{r_i, x_i\} = r_i & \text{si } r_i \leq x_i \end{array} \right.$

Supposons $y_{1-1,i} \leq x_i < y_{1i}$ avec $1 < H$

or :

$$\mathbb{M} V_i = x_i \text{ Prob } \{r_i > x_i\} + \mathbb{M} \{r_i | r_i \leq x_i\} \text{ Prob. } \{r_i \leq x_i\}$$

$$\text{soit : } \mathbb{M} V_i = x_i \sum_{h=1}^H \varphi_{hi} + \sum_{h=1}^{h=1-1} y_{hi} \varphi_{hi}$$

$$\text{ou encore : } \mathbb{M} V_i = \left[1 - \sum_{h=1}^{h=1-1} \varphi_{hi}\right] x_i + \sum_{h=1}^{h=1-1} y_{hi} \varphi_{hi} \text{ pour}$$

$$y_{1-1,i} \leq x_i < y_{1i} \text{ avec } 1 = 2, \dots, h, \text{ successivement.}$$

Par conséquent $\mathbb{M} V_i$ est une fonction de x_i seulement.

Nous appelons cette fonction $F_i(x_i)$ — c'est une fonction en ligne brisée, aux pentes décroissantes — il en résulte que — $F_i(x_i)$ est convexe et — $\mathbb{M} \bar{\omega}_i$ est « convexe séparable » au sens de Scarf-Dantzig.

Au lieu de rechercher le maximum de l'espérance mathématique du profit soit : $\text{Max } \sum_{i=1}^n \mathbb{M} \bar{\omega}_i$, on déterminera le minimum de l'espérance mathématique du coût soit :

$$\text{Min } \sum_{i=1}^n \mathbb{M} \bar{\omega}_i, \text{ ceci est un problème de programmation}$$

où la fonction économique est « convexe séparable », les contraintes étant linéaires.

Il existe différentes méthodes permettant la résolution de ce problème. (Cf. Applications et prolongements de la programmation linéaire - G.B. Dantzig, trad. Dunod, ch. 15-3.)

II

Dans cette deuxième partie nous considérons le problème suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max } \sum_{i=1}^n \pi_i \bar{\omega}_i &= \text{Max } \sum_{i=1}^n \pi_i [p_i V_i - c_i x_i - \sigma_i S_i - \mu_i M_i] \\ \text{FX} \geq K \text{ (resp. } \leq K) &\iff \forall x_j \neq 0 \in X \iff \Theta_{ij} = 0 \forall j \\ X &\geq 0 \\ \Theta_{ij} [x_i - f_{ij}(x_j)] &= 0 \\ \Theta_{ij} = 1 &\iff \left\{ \begin{array}{l} \Theta_{kj} = 0 \quad \forall k \neq i \\ \Theta_{lk} = 0 \quad \forall k \neq j \\ \Theta_{js} = 0 \quad \forall s \end{array} \right. \quad s, i, j, k \in N \end{aligned}$$

Remarque :

Il s'agit d'une première généralisation du paragraphe (1). Puisque nous ajoutons aux contraintes, un certain nombre de contraintes non linéaires de la forme $\Theta_{ij} [x_i - f_{ij}(x_j)] = 0$ la valeur moyenne du coût total — $\sum \pi_i \bar{\omega}_i$ demeure une fonction « convexe séparable », ne dépendant que des variables x_i , mais le problème de minimisation du coût total devient un problème de programmation convexe où les contraintes ne sont plus linéaires. La méthode d'approche des programmes généralisés due à Philip Wolfe pourrait être utilisée dans ce cas. (Ch. 15-3 - G.B. Dantzig-Dunod.) Cependant, il peut être préférable d'opérer de la façon suivante : on substitue aux x_i de la fonction objectif les $f_{ij}(x_j)$ correspondant — chaque fois qu'il y a lieu de le faire, c'est-à-dire de façon à éliminer les contraintes non linéaires. Nous serons ramenés ainsi à un problème de programmation à contraintes linéaires, mais où la fonction économique, non linéaire, n'est plus nécessairement convexe.

On obtient :

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \sum_{i=1}^n - \mathbb{W} \bar{\omega}_i = \\
 & = \text{Min} \sum_{i=1}^n - \mathbb{W} [p_i V_i - c_i x_i - \sigma_i S_i - \mu_i M_i] \\
 & = \text{Min} \sum_{i=1}^n \mathbb{W} [c_i x_i + \sigma_i (x_i - V_i) + \mu_i (r_i - V_i) - p_i V_i] \\
 & = \text{Min} \sum_{i=1}^n [(c_i + \sigma_i) x_i + \mu_i \mathbb{W} r_i - (p_i + \sigma_i + \mu_i) \mathbb{W} V_i] \\
 & = \text{Min} \sum_{i=1}^n [c_i x_i + \mu_i \mathbb{W} r_i - P_i F_i(x_i)]
 \end{aligned}$$

Nous avons au plus $\frac{n}{2}$ contraintes de la forme $\Theta_{ij} [x_i - f_{ij}(x_j)] = 0$ chaque fois qu'une telle contrainte existe, nous remplaçons les x_i de la fonction économique par $f_{ij}(x_j)$. Nous obtenons alors, comme valeur moyenne du coût partiel :

$$- \mathbb{W} \bar{\omega}_i = C_i f_{ij}(x_j) + \mu_i \mathbb{W} r_i - P_i F_i(f_{ij}(x_j))$$

Nous avons vu que

$$F_i(x_i) = [1 - \sum_{h=1}^{h=i-1} \phi_{hi}] x_i + \sum_{h=1}^{h=i-1} h_i \phi_{hi}$$

pour $y_{i-1,i} \leq x_i < y_{ii}$ avec $i = 2, \dots, H$

successivement. (Cf. I), par conséquent :

$$- \mathbb{W} \bar{\omega}_i = C_i f_{ij}(x_j) + \mu_i \mathbb{W} r_i -$$

$$- P_i [(1 - \sum_{h=1}^{h=i-1} \phi_{hi}) f_{ij}(x_j) + \sum_{h=1}^{h=i-1} y_{hi} \phi_{hi}] \text{ avec}$$

$i=2, \dots, H$ successivement pour $y_{i-1,i} \leq f_{ij}(x_j) < y_{ii}$

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}
 - \mathbb{W} \bar{\omega}_i &= [C_i - P_i (1 - \sum_{h=1}^{h=i-1} \phi_{hi})] f_{ij}(x_j) + \\
 &+ \mu_i \mathbb{W} r_i - P_i \sum_{h=1}^{h=i-1} y_{hi} \phi_{hi}
 \end{aligned}$$

avec $i = 2, \dots, H$ en tenant compte des intervalles de variation :

$$f^{-1}_{ij}(y_{i-1,i}) \leq x_j < f^{-1}_{ij}(y_{1,i})$$

Pour que la fonction économique soit « convexe séparable », il faut et il suffit que chaque valeur moyenne de coût partiel soit convexe (les valeurs moyennes sont additives) et d'autre part nous sommes en présence d'une somme de n fonctions d'une variable chacune — et la somme de fonctions convexes est également convexe.

Les conditions de convexité de la fonction économique sont évidemment de la forme :

$$\Theta_{ij} [C_i - P_i (1 - \sum_{h=1}^{h=1-i} \phi_{hi})] f''_{ij}(x_j) > 0$$

pour $i = 2, \dots, H$

Si les conditions sont vérifiées, alors on a intérêt à utiliser la méthode présentée, puisque l'on aboutit encore à un programme convexe à contraintes linéaires, déterministe, alors que le problème posé était stochastique à contraintes non linéaires. De plus les dimensions du programme sont réduites (élimination d'autant de variables qu'il y a de contraintes non linéaires).

III

Nous abordons maintenant le problème tel qu'il a été posé au début, c'est-à-dire avec en plus des contraintes non linéaires relatives aux variables aléatoires, contraintes de la forme :

$$\Theta_{ij} [r_i - \Psi_{ij}(r_j)] = 0$$

$$\Theta_{ij} = 1 \iff \begin{cases} \Theta_{kj} = 0 \quad \forall k \neq i \\ \Theta_{ik} = 0 \quad \forall k \neq j \\ \Theta_{js} = 0 \quad \forall s \end{cases} \quad s, i, j, k \in N$$

soit par conséquent le problème équivalent :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n \omega_i = \text{Min} \sum_{i=1}^n [C_i x_i + \mu_i r_i - P_i F_i(x_i)]$$

$$\Theta_{ij} x_i - f_{ij}(x_j) = 0$$

$$\Theta_{ij} r_i - \Psi_{ij}(r_j) = 0$$

$$\Theta_{ij} = 1 \iff \begin{cases} \Theta_{kj} = 0 \quad \forall k \neq i \\ \Theta_{ik} = 0 \quad \forall k \neq j \\ \Theta_{js} = 0 \quad \forall s \end{cases}$$

$$i, j, k, s \in N$$

$$FX \geq K (\text{resp. } \leq K) \iff \forall x_i \neq 0 \in X \implies \Theta_{ij} = 0 \quad \forall j$$

$$X \geq 0$$

1) Nous supposons $\Psi_{ij}(r_j)$ strictement croissante avec r_j
 r_j prend les valeurs successives $0 \leq y_{1,j} \leq y_{2,j} \dots \leq y_{H,j}$
 avec les probabilités $0 \quad \varphi_{1,j} \quad \varphi_{2,j} \quad \varphi_{H,j}$

$$\text{et la relation} \quad \sum_{h=1}^H \varphi_{hj} = 1$$

r_i prend les valeurs successives

$$0 \leq \Psi_{ij}(y_{1,j}) \leq \Psi_{ij}(y_{2,j}) \dots \leq \Psi_{ij}(y_{H,j})$$

avec les probabilités

$$0, \quad \varphi_{1,j} \quad \varphi_{2,j} \quad \varphi_{H,j}$$

en effet, la relation fonctionnelle $r_i = \Psi_{ij}(r_j)$ impose la même probabilité pour $y_{i,j}$ et $\Psi_{ij}(y_{ij})$

$$\begin{cases} i = 1, 2, \dots, H \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

or nous avons vu avec le § 1 que $F_i(x_i) = [1 - \sum_{h=1}^{h=i-1} \varphi_{hi}] x_i$

$$+ \sum_{h=1}^{h=i-1} y_{hi} h_i \quad \text{pour} \quad y_{i-1,i} \leq x_i < y_{i,i}$$

avec $i = 1, 2, \dots, H$ successivement.

Appliquons cette formule à la nouvelle distribution de probabilités de r_i ci-dessus :

$$F_i(x_i) = \left[1 - \sum_{h=1}^{h=1-1} \varphi_{hj}\right] x_i + \sum_{h=1}^{h=1-1} \Psi_{hj} \varphi_{hj}$$

pour $\Psi_{1-1,j} \leq x_i < \Psi_{1,j}$

et $i = 2, \dots, H$ successivement.

Ayant, maintenant, tenu compte de la contrainte

$$\Theta_{ij} [r_i - \Psi_{ij}(r_j)] = 0$$

Nous sommes ramenés au problème du § II. Nous utilisons le même procédé de substitution pour nous débarrasser de la contrainte

$$\Theta_{ij} [x_i - f_{ij}(x_j)] = 0$$

Nous avons alors :

$$- \mathbb{W} \bar{\omega}_i = C_i x_i + \mu_i \mathbb{W} r_i - P_i F_i(x_i)$$

$$\text{soit } - \mathbb{W} \bar{\omega}_i = C_i f_{ij}(x_j) + \mu_i \mathbb{W} r_i - P_i F_i(f_{ij}(x_j))$$

$$\text{or } F_i[f_{ij}(x_j)] = \left[1 - \sum_{h=1}^{h=1-1} \varphi_{hj}\right] f_{ij}(x_j) + \sum_{h=1}^{h=1-1} \Psi_{hj} \varphi_{hj}$$

pour $\Psi_{1-1,j} \leq f_{ij}(x_j) < \Psi_{1,j}$ et $i = 2, \dots, H$ successivement

ou encore $f_{1-1,j}^{-1}(\Psi_{1-1,j}) \leq x_j < f_{1,j}^{-1}(\Psi_{1,j})$

Les conditions de convexité seront par conséquent de la forme :

$$\Theta_{ij} \left[C_i - P_i \left(1 - \sum_{h=1}^{h=1-1} \varphi_{hj} \right) \right] f''_{ij}(x_j) > 0$$

pour $i = 2, \dots, H$ successivement.

2) Nous supposons $\Psi_{ij}(r_j)$ strictement décroissante

alors pour $r_j = 0 \leq y_{1j} \leq y_{2j} \dots \leq y_{Hj}$

avec les probabilités $0, \varphi_{1j}, \varphi_{2j}, \dots, \varphi_{Hj}$

on aura $r_i = 0, \Psi_{1j}(y_{1j}) \geq \Psi_{2j}(y_{2j}) \geq \dots \geq \Psi_{Hj}(y_{Hj})$

et les probabilités $\varphi_{1j}, \varphi_{2j}, \dots, \varphi_{Hj}$

cette fois-ci nous considérons $\Psi_{1,j}(y_{1,j}) \leq x_i < \Psi_{1-1,j}(y_{1-1,j})$

et obtenons :

$$F_i(x_i) = x_i \sum_{h=1}^{h=1-1} \varphi_{hj} + \sum_{h=1}^{h=H} \varphi_{hj} \Psi_{hj} \text{ pour } i = 2, \dots, H$$

Stratégie en face d'une demande aléatoire

D'où :

$$- \mathbb{W} \bar{\omega}_i = [C_i - P_i \sum_{h=1}^{h=I-1} \varphi_{hj}] f_{ij}(x_j) + \mu_i \mathbb{W} r, - P_i \sum_{h=1}^{h=H} \varphi_{hj} \Psi_{hj}$$

et les conditions de convexité :

$$\Theta_{ij} [C_i - P_i \sum_{h=1}^{h=I-1} \varphi_{hj}] f''_{ij}(x_j) > 0 \quad \text{pour } i = 2, \dots, H$$

INTERPRÉTATION ÉCONOMIQUE

1) $\Psi_{ij}(r_j)$ *STRICTEMENT CROISSANTE*

Nous nous trouvons dans l'hypothèse de biens complémentaires techniques B_i et B_j .

Examinons les conditions :

$$(1) \quad \Theta_{ij} f''_{ij}(x_j) [C_i - P_i (1 - \sum_{h=1}^{h=1-1} \varphi_{hj})] < 0$$

pour $i = 2, \dots, H$

pour $\Theta_{ij} \neq 0$, elle implique l'existence de biens supplémentaires de provenance ($x_i = f_{ij}(x_j)$).

Par conséquent B_i et B_j sont des biens complémentaires techniques et supplémentaires de provenance.

D'autre part, si nous définissons la politique économique $\Pi_i = \frac{P_i}{C_i}$, ($i = 1, 2, \dots, n$), rapport du prix de vente théorique unitaire au coût théorique unitaire, nous pouvons interpréter (1) de la façon suivante :

a) soit $f''_{ij}(x_j) < 0$ ce qui signifie accélération du taux marginal algébrique de substitution (cf. ch. III) et entraîne :

$$C_i - P_i (1 - \sum_{h=1}^{h=1-1} \varphi_{hj}) < 0 \quad \text{pour } i = 2, \dots, H$$

$$\text{d'où } \Pi_i = \frac{P_i}{C_i} > \frac{1}{1 - \sum_{h=1}^{h=I-1} \varphi_{hj}} \quad \text{pour } i = 2, \dots, H$$

tenant compte de l'hypothèse $\sum_{h=1}^{h=H} \varphi_{hj} = 1$ et du fait que

l'inégalité doit être vérifiée pour toute valeur de $i = 2, \dots, H$

$$\text{on obtient : } \Pi_i = \frac{P_i}{C_i} > \frac{1}{\varphi_{Hj}}$$

C'est-à-dire que la politique Π_i relative au bien B_i doit tenir compte d'une limite inférieure $\frac{1}{\varphi_{Hj}}$ soit l'inverse de la proba-

bilité de la plus forte demande de B_j ; or, puisque nous nous sommes placés dans le cas de l'accélération du taux marginal algébrique de substitution, c'est-à-dire que la vitesse de remplacement de B_j par B_i augmente, que l'on fabrique de plus en plus de B_i et de moins en moins de B_j , alors l'entrepreneur a intérêt à envisager un prix de vente élevé pour B_i , c'est-à-dire à pratiquer une politique d'envergure qui se traduirait

$$\text{par : } \Pi_i = \frac{P_i}{C_i} > \frac{1}{\varphi_{Hj}}$$

Ainsi, dans le cas envisagé, c'est-à-dire de biens supplémentaires de provenance, complémentaires techniques, et dans une situation d'accélération du taux marginal algébrique de substitution, une politique économique normale, c'est-à-dire une politique d'envergure, est compatible avec les conditions de convexité (1); c'est dire qu'en général nous nous trouvons dans ces conditions (1) et le modèle mathématique proposé est applicable.

b) soit $f''_{ij}(x_j) > 0$ ce qui signifie saturation du taux marginal algébrique de substitution et entraîne :

$$C_i - P_i \left(1 - \sum_{h=1}^{h=I-1} \varphi_{Hj} \right) > 0 \quad \text{pour } i = 2, \dots, H$$

$$\text{soit : } \Pi_i = \frac{P_i}{C_i} < \frac{1}{1 - \sum_{h=1}^H \varphi_{hj}} \quad \text{pour } i = 2, \dots, H$$

tenant compte de l'hypothèse $\varphi_{hj} = 1$ et du fait que $\sum_{h=1}^H \varphi_{hj} = 1$ l'inégalité doit être vérifiée pour toute valeur de $i = 2, 3, \dots, H$,

$$\text{on obtient : } \Pi_i = \frac{P_i}{C_i} < \frac{1}{1 - \varphi_i}$$

C'est-à-dire que dans le cas de la saturation du taux marginal algébrique de substitution, lorsque B_j est de moins en moins remplacé par B_i , il est naturel pour l'entrepreneur de pratiquer une politique de prudence définie par :

$$\Pi_i < \frac{1}{1 - \varphi_{1,j}}$$

où $\varphi_{1,j}$ représente la probabilité de vente la plus faible de B_j .

Par conséquent, en général, dans le cas d'une politique économique normale, pour des biens complémentaires techniques et supplémentaires de provenance, dans une situation de saturation du taux marginal algébrique de substitution, les conditions de convexité (1) sont en général vérifiées et le modèle mathématique proposé est applicable.

2) $\Psi_{ij}(r_j)$ STRICTEMENT DECROISSANTE

Nous nous trouvons dans l'hypothèse de biens supplémentaires de destination B_i et B_j .

Examinons les conditions de convexité :

$$\Theta_{ij} [C_i - P_i \sum_{h=1}^{h=1-H} \varphi_{hj}] f''_{ij}(x_j) > 0 \quad \text{pour } i = 2, 3, \dots, H$$

pour $\Theta_{ij} \neq 0$ elles impliquent l'existence de biens supplémentaires de provenance ($x_i = f_{ij}(x_j)$), par conséquent B_i et B_j

sont des biens économiques supplémentaires de provenance et de destination.

a) pour $f''_{ij}(x_j) < 0$ ce qui signifie accélération du taux marginal algébrique de substitution et entraîne :

$$C_i - P_i \sum_{h=1}^{i-1} \varphi_{hj} < 0 \quad \text{pour } i = 2, 3, \dots, H$$

on obtient la condition :

$$\frac{P_i}{C_i} > \frac{1}{\sum_{h=1}^{i-1} \varphi_{hj}} \quad \text{pour } i = 2, 3, \dots, H$$

$$\text{soit : } \Pi_i = \frac{P_i}{C_i} > \frac{1}{\varphi_{1,j}}$$

Par conséquent, dans le cas de biens supplémentaires de provenance et de destination, lorsqu'il y a accélération du taux marginal algébrique de substitution, la limite inférieure de la politique est égale à l'inverse de la probabilité de vente maximale soit : $\frac{1}{\varphi_{1,j}}$. Ceci correspond à une politique économique

normale, tenant compte du fait que l'on fabrique de plus en plus de B_i , il y a lieu, en effet, de pratiquer une politique d'envergure et d'envisager un prix de vente élevé. Ainsi, dans la plupart des cas rencontrés, les conditions de convexité se trouveront vérifiées et le modèle mathématique est applicable.

b) pour $f''_{ij}(x) > 0$ ce qui signifie saturation du taux marginal algébrique de substitution et entraîne :

$$C_i - P_i \sum_{h=1}^{i-1} \varphi_{hj} > 0 \quad \text{pour } i = 2, 3, \dots, H$$

on obtient la condition :

$$\frac{P_i}{C_i} < \frac{1}{\sum_{h=1}^{i-1} \varphi_{hj}} \quad \text{pour } i = 2, 3, \dots, H$$

$$\text{soit : } \Pi_1 = \frac{P_1}{C_1} < \frac{1}{1 - \varphi_{Hj}}$$

Par conséquent, dans le cas des biens supplémentaires de provenance et de destination, lorsqu'il y a saturation du taux marginal algébrique de substitution, les conditions de convexité (2) correspondent à une politique de prudence avec pour limite supérieure de Π_1 la quantité $\frac{1}{1 - \varphi_{Hj}}$ où φ_{Hj} représente la probabilité de la plus faible demande de B_j .

CONCLUSION

Il est intéressant de constater que les conditions de convexité sont compatibles avec la politique économique, ce qui nous permet de conclure que le modèle mathématique proposé sera utilisable dans de nombreuses situations économiques.

EXEMPLE A 3 VARIABLES

Nous présentons un exemple simple à 3 variables pour illustrer la méthode proposée. Les valeurs numériques ont été choisies au hasard. Il faudrait en effet une enquête statistique très élaborée pour obtenir des chiffres correspondant à la réalité.

Le problème envisagé est le suivant :

Face à une demande de moyens de transports incluant le métropolitain, l'autobus, le taxi, après avoir déterminé les distributions de probabilités respectives de la demande de ces trois moyens de transports en relation par exemple avec le temps ou l'utilité, quelle est l'offre optimale que devraient favoriser les pouvoirs publics, sachant que le métropolitain et l'autobus sont des biens supplémentaires de provenance et que, par ailleurs, les offres d'autobus et de taxis sont liées, soit par une relation de complémentarité parfaite de provenance ou une contrainte linéaire d'inégalité.

Notations :

r_1 = variable aléatoire, demande de métropolitain

r_2 = variable aléatoire, demande d'autobus

r_3 = variable aléatoire, demande de taxi

Remarque :

On peut évaluer r_i ($i = 1, 2, 3$) en nombre de places demandées ou en francs.

B_1 = métropolitain, B_2 = autobus, B_3 = taxi

x_1 = variable de choix, offre de métropolitain

x_2 = variable de choix, offre d'autobus

x_3 = variable de choix, offre de taxi

V_i = vente de B_i ou demande satisfaite de B_i $i = 1, 2, 3$

$S_i = x_i - V_i$ = surproduction de B_i , ou non-utilisation de B_i

$M_i = r_i - V_i$ = manque de B_i

c_i = coût de l'offre unitaire normale de B_i

p_i = utilité de la demande satisfaite

σ_i = charge unitaire de non-utilisation affectant B_i

μ_i = pénalité unitaire de manque affectant B_i

$C_i = c_i + \sigma_i$ = coût théorique unitaire de B_i

$P_i = p_i + \sigma_i - \mu_i$ = utilité théorique unitaire de B_i

$x_1 = f_{1,2}(x_2)$ = fonction supplémentaire de provenance de x_2
soit $x_1 = 10 - x_2^2$

b_i ($i = 1, 2, 3$) et k = constantes.

Hypothèses :

$V_i = \text{Min} \{r_i, x_i\}$ ce qui équivaut à $S_i \geq 0$ $M_i \geq 0$ $S_i M_i = 0$

D'autre part pour B_1 ,

r_1 ne peut prendre que les valeurs	0	$1 \leq 2 \leq 3$
avec les probabilités	0	$\frac{6}{8} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{8}$

r_2 ne peut prendre que les valeurs	10	6	4	0
avec les probabilités	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0

r_3 ne peut prendre que les valeurs	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
avec les probabilités	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

On cherche à rendre maximale la valeur moyenne du profit

total $\sum_{i=1}^{i=3} \bar{\omega}_i$, le profit partiel ω_i étant défini pour B_i par :

$$\bar{\omega}_i = p_i V_i - c_i x_i - \sigma_i S_i - \mu_i M_i$$

II. Le problème est la détermination des x_i rendant maxi-

male $\sum_{i=1}^{i=3} \bar{\omega}_i$ sous les conditions :

$$x_1 = 10 - x_2^2$$

$$\sum_{i=2}^{i=3} b_i x_i \geq k$$

$$x_i \geq 0$$

$$i = 1, 2, 3$$

au lieu de rechercher le maximum de l'espérance mathématique du profit, on détermine le minimum de l'espérance mathématique du coût, soit :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{i=3} - \pi \bar{\omega}_i =$$

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{i=3} - \pi [p_i V_i - c_i x_i - \sigma_i S_i - \mu_i M_i] =$$

$$\lambda (\text{Min}) \Rightarrow \lambda (\text{Min}) =$$

$$\text{Min} \sum_i [C_i x_i + \mu_i \pi r_i - P_i \pi V_i]$$

or πV_i est une fonction de x_i soit $\pi V_i = F_i(x_i)$

D'autre part $\sum_{i=1}^{i=3} \mu_i \pi r_i$ est une quantité fixe que nous appellerons H.

Il en résulte le programme non linéaire suivant : (1)

$$\lambda (\text{min}) = H + C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 - P_1 F_1(x_1) -$$

$$- P_2 F_2(x_2) - P_3 F_3(x_3)$$

$$x_1 = 10 - x_2^2$$

$$\sum_{i=2}^3 b_i x_i \geq k$$

$$x_i \geq 0$$

$$i = 1, 2, 3$$

Nous remarquons que la fonction objectif est convexe sépa-

nable au sens de « Scarf-Dantzig ». Explicitons les $F_1(x_1)$: on obtient :

$$F_1(x_1) = x_1 \quad \text{pour} \quad 0 \leq x_1 < 1$$

$$F_1(x_1) = \frac{x_1}{4} + \frac{3}{4} \quad 1 \leq x_1 < 2$$

$$F_1(x_1) = \frac{x_1}{8} + 1 \quad 2 \leq x_1 < 3$$

$$F_2(x_2) = x_2 \quad \text{pour} \quad 0 \leq x_2 < 4$$

$$F_2(x_2) = \frac{7}{8} x_2 + \frac{1}{2} \quad 4 \leq x_2 < 6$$

$$F_2(x_2) = \frac{x_2}{2} + \frac{11}{4} \quad 6 \leq x_2 < 10$$

$$F_3(x_3) = x_3 \quad \text{pour} \quad 0 \leq x_3 < \frac{3}{2}$$

$$F_3(x_3) = \frac{2x_3}{3} + \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \leq x_3 < \frac{5}{2}$$

$$F_3(x_3) = \frac{x_3}{3} + \frac{4}{3} \quad \frac{5}{2} \leq x_3 < \frac{7}{2}$$

De façon à transformer ce programme à contraintes non linéaires en un programme à contraintes linéaires, nous substituons aux x_1 de la fonction objectif $10 - x_2^2$. Nous obtenons :

$$(I) \equiv (II) \quad \left| \begin{array}{l} \lambda(\min) = H + C_1(10 - x_2) + C_2 x_2 + C_3 x_3 - \\ \quad - P_1 F_1(10 - x_2^2) - P_2 F_2(x_2) - P_3 F_3(x_3) \\ \sum_{i=2}^3 b_i x_i \geq k \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \\ \text{et la relation indépendante } x_1 = 10 - x_2^2. \end{array} \right.$$

Dans cette substitution, il faut tenir compte des nouveaux intervalles de variation : $x_1 = 10 - x_2^2 \Rightarrow x_2 = \sqrt{10 - x_1}$

$$\text{D'où : } F_1(10 - x_2^2) = 10 - x_2^2 \quad 3 < x_2 \leq \sqrt{10}$$

$$F_1(10 - x_2^2) = \frac{13}{4} - \frac{x_2^2}{4} \quad 2\sqrt{2} < x_2 \leq 3$$

$$F_1(10 - x_2^2) = \frac{9}{4} - \frac{x_2^2}{8} \quad \sqrt{7} < x_2 \leq 2\sqrt{2}$$

l'intervalle de variation pour $x_2 = \sqrt{7} < x_2 \leq \sqrt{10}$

groupant les termes en x_2 et x_3 respectivement, la fonction économique s'écrit :

$$\lambda(\min) = G(x_3) + W(x_2)$$

$$\text{avec } G(x_3) = H + 10C_1 + C_3x_3 - P_3F(x_3)$$

$$\text{et } W(x_2) = C_2x_2 - C_1x_2 - P_2F_2(x_2) - P_1F_1(10 - x_2)$$

or $G(x_3)$ est convexe au sens de Scarf-Dantzig, en tant que somme de deux fonctions convexes à savoir : la droite d'équation $Y_1 = H + 10C_1 + C_3x_3$ et la ligne brisée convexe :

$$Y_2 = -P_3F(x_3)$$

D'autre part $W(x_2)$ n'est défini que dans l'intervalle

$$\sqrt{7} < x_2 \leq \sqrt{10} \quad \text{et s'écrit :}$$

$$W(x_2) = [C_2 - P_2]x_2 - C_1x_2^2 - P_1F_1(10 - x_2^2)$$

Les conditions de convexité sont :

$$P_1 - C_1 \geq 0 \quad 3 < x_2 \leq \sqrt{10}$$

$$\frac{P_1}{2} - C_1 \geq 0 \quad 2\sqrt{2} < x_2 \leq 3$$

$$\frac{P_1}{4} - C_1 \geq 0 \quad \sqrt{7} < x_2 \leq 2\sqrt{2}$$

Cela signifie que si $\frac{P_1}{C_1} \geq 4$, la fonction économique est convexe dans l'intervalle $\sqrt{7} < x_2 \leq \sqrt{10}$, et notre problème devient un programme convexe à contraintes linéaires dans cet intervalle, c'est-à-dire que nous aboutissons à une formulation classique.

INTERPRÉTATION ÉCONOMIQUE

Nonobstant le caractère fictif des valeurs numériques choisies, on tire les conclusions suivantes : une politique économique normale, en période d'expansion, caractérisée par une accélération du taux marginal algébrique de substitution, ce qui s'exprime ici par $\Theta_{1,2} f''_{1,2}(x_2) = -2 < 0$, on pratique une politique d'envergure définie par $\frac{P_1}{C_1} \geq 4$. Cette marge bénéficiaire est habituelle dans le commerce de luxe, l'artisanat, les produits d'importation.

Au cas où, dans le problème précis qui nous occupe, cette marge bénéficiaire paraîtrait excessive, alors, il suffirait de réduire l'intervalle de variation de x_2 , par exemple, pour $2\sqrt{2} < x_2 \leq \sqrt{10}$ la politique est définie par $\frac{P_1}{C_1} \geq 2$ et si l'on se limite à $3 < x_2 \leq \sqrt{10}$, alors on obtient $\frac{P_1}{C_1} \geq 1$ ce qui est en principe, toujours réalisé.

De toute manière, en précisant l'intervalle de variation de x_2 , du point de vue mathématique, il s'agit simplement d'une contrainte linéaire supplémentaire, le problème général demeure un programme convexe à contraintes linéaires.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

« Groupes Hamiltoniens et Théorème de Hölder. »

Vu et approuvé

Paris, le 16 juin 1969

Le Doyen de la Faculté des Sciences
de Paris

Marc ZAMANSKY

Vu

et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris

Jean ROCHE

GROUPES HAMILTONIENS ET THÉORÈME DE HÖLDER

1) DEFINITIONS

On appelle groupe un ensemble G sur lequel on a défini une opération qui satisfait aux axiomes suivants :

1) Condition d'associativité : $(ab) c = a (bc)$

$(a + b) + c = a + (b + c)$; a, b, c étant des éléments de l'ensemble G .

2) Condition d'existence d'un élément neutre :

$$a + o = o + a = a \quad ae = ea = a.$$

3) Condition d'existence d'un élément opposé ou inverse :

$$a + (-a) = (-a) + a = o \quad a.a^{-1} = a^{-1}.a = e.$$

4) Un groupe est dit commutatif ou abélien si $ab = ba$ quel que soit a ou b .

Remarque :

Cette opération qui associe à un couple de deux nombres un troisième, appelé somme, produit, puissance, etc., s'appelle aussi loi de composition interne sur G et se note $\perp$, ou encore application du produit $G \times G$ dans G . Ceci implique, entre autres propriétés, que dans un groupe fini, c'est-à-dire comprenant un nombre fini d'éléments, à tout couple d'élé-

ments du groupe on peut faire correspondre un troisième élément appartenant au groupe. En particulier :

$$\forall a \in G \Rightarrow a.a \in G$$

2) SOUS-GROUPES

Définitions :

Etant donné un groupe G , si un ensemble H , se composant de certains éléments du groupe G est un groupe par rapport aux lois de composition $\mathcal{L}$, vérifiées dans G , on dit que H est un sous-groupe du groupe G .

3) TRANSFORMATIONS D'UN SOUS-GROUPE

Définitions :

On appelle transformé d'un sous-groupe H par un élément b du groupe G , l'ensemble des éléments de ce sous-groupe transformés par b , c'est-à-dire l'ensemble des éléments tels que $-b + x + b$, b étant un élément arbitrairement choisi mais fixe du groupe G et x parcourant le sous-groupe H .

Définitions :

Un sous-groupe H d'un groupe G est un sous-groupe invariant si le transformé d'un élément quelconque de H par un élément arbitraire de G est un élément de H .

Proposition I :

« Tout sous-groupe d'un groupe commutatif est un sous-groupe invariant. »

Démonstration :

Soit le groupe abélien G , b est un élément arbitraire de G , soit H un sous-groupe de G , a étant un élément quelconque de H , on a : $-b + a + b = a - b + b = a$ (commutatif).

On peut se poser la question : quels sont les autres groupes (non abéliens) qui jouissent de cette propriété (tout sous-groupe invariant) ?

Définition :

Un groupe non abélien dans lequel tout sous-groupe est invariant est dit groupe hamiltonien. Par exemple, le groupe des quaternions est hamiltonien.

QUATERNIONS

Le groupe des quaternions, selon le théorème de Hölder, est défini par les relations : $A^4 = E$, $BAB^{-1} = A^{-1}$, $B^2 = A^2$, en tant que groupe d'ordre 8 avec les générateurs A et B .

Les 8 éléments sont appelés quaternions, ils sont :

$E, A, A^2, A^3, B, AB, A^2B, A^3B$.

Démonstration :

Le quaternion $\mathcal{L} = A^\alpha B^\beta A^\gamma B^\delta \dots$

Nous allons d'abord montrer que, tenant compte des relations de Hölder, on a toujours $\mathcal{L} = A^\alpha B^\beta$.

En effet : $A^4 = E \implies \alpha = 0, 1, 2, 3$.

D'autre part : $B^2 = A^2 \implies B^2 \cdot B^2 = A^2 \cdot B^2 \implies B^4 = A^4 = E$
d'où l'exposant de B : $\beta = 0, 1, 2, 3$.

De plus, on peut toujours écrire $B^\beta A^\alpha = A^{\alpha'} B^{\beta'}$

En effet, d'après Hölder : $BAB^{-1} = A^{-1}$, d'où

$BAB^{-1} \cdot B = A^{-1}B$ et $BA = A^{-1}B$.

Il en résulte :

$$BA = A^4 \cdot A^{-1}B = A^3B$$

$$BA^2 = B^3 = B^2 \cdot B = A^2B.$$

$$BA^3 = A^{-1}BA^2 = A^{-1}B^3 = A^{-1}A^2B = AB$$

$$B^3A = B^2BA = A^2A^{-1}B = AB$$

$$B^3A^2 = B^2BA^2 = A^2B^3$$

$$B^3A^3 = BB^2A^2A = BA = A^3B$$

Nous venons de montrer que l'élément de groupe $\mathcal{L}$ peut toujours se mettre sous la forme $\mathcal{L} = A^x B^y$ où $|x| = 1, 2, 3, 4$.

Ce qui nous donnerait 16 éléments $\mathcal{L}_i$, mais nous avons les 8 égalités :

$$\begin{array}{l} A^1 B^4 = A^3 B^2 \\ A^2 B^4 = A^4 B^2 \\ A^3 B^4 = A B^2 \\ A^4 B^4 = A^2 B^2 \\ \\ A B = A^3 B^3 \\ A^2 B = A^4 B^3 \\ A^3 B = A B^3 \\ A^4 B = A^2 B^3 \end{array}$$

d'où 8 éléments dans le groupe des quaternions. Ces 8 éléments peuvent s'écrire :

$$\begin{array}{l} A B^4 = A \\ A^2 B^4 = \overline{A^2} \\ A^3 B^4 = \overline{A^3} \\ A^4 B^4 = \overline{E} \text{ et} \\ \underline{AB}, \underline{A^2 B}, \underline{A^3 B}, \underline{A^4 B} = \underline{B}. \end{array}$$

Détermination des éléments inverses dans le groupe des quaternions :

$$\begin{array}{ll} A.X = E \implies X = A^3 & A \text{ et } A_3 \text{ sont inverses} \\ A^2.X = E \implies X = A^2 \\ A^3.X = E \implies X = A \\ B.X = E \implies X = A^2 B \\ AB.X = E \implies X = A^3 B & (\text{car } A^3 B = BA) \\ A^2 B.X = E \implies X = B \\ A^3 B.X = E \implies X = AB \end{array}$$

Dénombrement des sous-groupes du groupe des quaternions :

Chaque sous-groupe du groupe des quaternions doit vérifier les conditions suivantes :

- 1) posséder l'élément E ,
- 2) existence d'un inverse,
- 3) le produit d'un élément par lui-même appartient au sous-groupe,
- 4) le produit de deux éléments quelconques du sous-groupe est un autre élément du sous-groupe.

Tenant compte, pour commencer, des deux premiers critères, à savoir : existence d'un élément neutre E et d'un inverse pour chaque élément, nous obtenons les possibilités suivantes :

- 1 sous-groupe d'ordre 2 dont les éléments respectifs sont :
 E, A^2 .
- 3 sous-groupes d'ordre 3 dont les éléments respectifs sont :
 (A, A^3, E)
 (B, A^2B, E)
 (AB, A^3B, E)
- 3 sous-groupes d'ordre 4 :
 (E, A^2, A, A^3)
 (E, A^2, B, A^2B)
 (E, A^2, AB, A^3B)
- 3 sous-groupes d'ordre 5 :
 (E, A, A^3, B, A^2B)
 (E, A, A^3, AB, A^3B)
 (E, B, A^2B, AB, A^3B)
- 3 sous-groupes d'ordre 6 :
 $(E, A^2, A, A^3, B, A^2B)$
 $(E, A^2, A, A^3, AB, A^3B)$
 $(E, A^2, B, A^2B, AB, A^3B)$
- 1 sous-groupes d'ordre 7 :
 $(E, A, A^3, B, A^2B, AB, A^3B)$

Examinant chacun des 14 sous-groupes énumérés ci-dessus, en tenant compte de la totalité des conditions requises, on s'aper-

çoit que, dans les sous-groupes d'ordre 3, il manque le terme A^2 ; dans les sous-groupes d'ordre 5, en examinant les produits croisés, il manque toujours au moins un terme; même remarque pour les sous-groupes d'ordre 6 et 7.

En conclusion, on retrouve ainsi par des moyens élémentaires un résultat connu, à savoir que le groupe des quaternions contient 4 sous-groupes exactement.

Propriété I :

Le groupe des quaternions contient 4 sous-groupes exactement : 1 sous-groupe d'ordre 2 et 3 sous-groupes d'ordre 4.

Propriété II :

Ces sous-groupes sont invariants.

Démonstration :

Considérons le sous-groupe d'ordre 2; les éléments sont E, A^2 .

Il nous faut effectuer 7 opérations pour chaque élément afin de calculer son transformé :

$$A \cdot A^2 \cdot A^3 \Rightarrow A^2$$

$$A^2 \cdot A^2 \cdot A^2 \Rightarrow A^2$$

$$A^3 \cdot A^2 \cdot A \Rightarrow A^2$$

$$B \cdot A^2 \cdot A^2 B \Rightarrow A^2 B \cdot B \cdot A^2 = A^2 \text{ (cf. page 97)}$$

$$AB \cdot A^2 \cdot A^3 B \Rightarrow BA^3 \cdot A^2 \cdot A^3 B = BA^6 B = B^2 = A^2$$

$$A^2 B \cdot A^2 \cdot B \Rightarrow BA^2 \cdot A^2 B = B^2 = A^2$$

$$A^3 B \cdot A^2 \cdot AB \Rightarrow A^3 B \cdot A^3 B = B^3 A^3 A^3 B = B^4 B^2 = A^2$$

On ferait de même pour E et il est évident que le transformé de E est E lui-même. On a vérifié ainsi que le sous-groupe d'ordre 2 est invariant.

Appliquant la même méthode aux trois sous-groupes d'ordre 4 on vérifie également que ceux-ci sont invariants. Ce qui démontre la propriété II, à savoir que tous les sous-groupes du groupe des quaternions sont invariants et par conséquent le groupe des quaternions est hamiltonien.

Propriété III :

La relation de Hölder $BAB^{-1} = A^{-1}$ se généralise aux quaternions eux-mêmes. C'est-à-dire que si A et B sont des quaternions au lieu d'être des générateurs, la relation devient $BAB^{-1} = A^{\pm 1}$; ce qui signifie que le transformé du quaternion A est identique à lui-même $A^{\pm 1}$ ou son inverse A^{-1} .

Démonstration :

Nous venons de vérifier cette relation pour les éléments E et A^2 . Effectuons les calculs pour les autres éléments.

1) A

$$A^2 A A^2 \Rightarrow A$$

$$A A A^3 \Rightarrow A$$

$$A^3 A A \Rightarrow A$$

$$B . A . A^2 B \Rightarrow B A_3 B = B . BA \text{ (cf. p. 97) } = B^2 A = A_3$$

$$A^2 B . A . B \Rightarrow B A^2 A B = B A^3 B = B B^3 A^3 = A^3$$

$$A B . A . A^3 B \Rightarrow A B^2 = A^3$$

$$A^3 B A A B \Rightarrow A^3 B^4 = A^3$$

2) A^3

$$A^2 A^3 A^2 \Rightarrow A^3$$

$$A A^3 A^3 \Rightarrow A^3$$

$$A^3 A^3 A \Rightarrow A^3$$

$$B . A^3 . A^2 B \Rightarrow B A B = A^{-1} B^2 = A$$

$$A^2 B A^3 B \Rightarrow B A^2 A^3 B = B A B = A$$

$$A B A^3 A^3 B \Rightarrow A B A^2 B = A$$

$$A^3 B A^3 A B \Rightarrow A^3 B^2 = A$$

3) B

$$A^2 . B . A^2 \Rightarrow A^2 . B A^2 = A^2 A^2 B = B$$

$$A B A^3 \Rightarrow A B A^3 = B^3 A A^3 = B^3 = A^2 B$$

$$A^3 B A \Rightarrow A^3 B A = B A A = B A^2 = B^3 = A^2 B$$

$$B B A^2 B \Rightarrow B^2 A^2 B = A^4 B = B$$

$$A^2 B . B . B \Rightarrow A^2 B^2 . B = B$$

$$A B . B . A^3 B \Rightarrow A B^2 . A^3 B = A B^2 . B A = A^3 . A^{-1} B = A^2 B$$

$$A^3 B . B . A B \Rightarrow A^3 A^2 A B = A^2 B$$

4) AB

$$A^2 A B A^2 \Rightarrow A^3 B A^2 = A^3 A^2 B = AB$$

$$A A B A^3 \Rightarrow A^2 B A^3 = A^2 A B = A^3 B$$

$$A^3 A B A \Rightarrow A^4 B A = A^3 B$$

$$B A B A^2 B \Rightarrow B A B A^2 B = A^{-1} B B A^2 B = A^{-1} B = B A = A^3 B$$

$$A^2 B A B B \Rightarrow A^3 B A B^2 = A^2 A^{-1} B B^2 = A B^2 B = A^3 B$$

$$A B A B A^3 B \Rightarrow A B A B A^3 B = A A^{-1} B B A^3 B = B^2 A^3 B = AB$$

$$A^3 B A B A B \Rightarrow A^3 B A B A B = A^3 A^{-1} B B A B = A^2 B^2 A B = AB$$

5) $A^2 B$

$$A^2 A^2 B A^2 \Rightarrow A^4 B A^2 = B^3 = A^2 B$$

$$A A^2 B A^3 \Rightarrow A^3 B A A^2 = A^3 A^{-1} B A^2 = A^2 B A^2 = B^5 = B$$

$$A^3 A^2 B A \Rightarrow A^5 B A = A^5 A^{-1} B = B$$

$$B A^2 B A^2 B \Rightarrow B A^2 B^4 = B A^2 = A^2 B$$

$$A^2 B A^2 B B \Rightarrow A^2 B A^2 B^2 = A^2 B$$

$$A B A^2 B A^3 B \Rightarrow A B^4 A^3 B = A^4 B = B$$

$$A^3 B A^2 B A B \Rightarrow A B^3 B^2 B A B = A B^6 A B = A B^2 A B = A^4 B = B$$

6) $A^3 B$

$$A^2 A^3 B A^2 \Rightarrow A B A^2 = A \cdot B^3 = A B^2 B = A^3 B$$

$$A A^3 B A^3 \Rightarrow B A^3 = AB$$

$$A^3 A^3 B A \Rightarrow A^2 B A = A^2 A^{-1} B = AB$$

$$B A^3 B A^2 B \Rightarrow B A^3 B^4 = B A^3 = AB$$

$$A^2 B A^3 B B \Rightarrow B^3 A^3 B^2 = B^3 A = AB$$

$$A B A^3 B A^3 B \Rightarrow A B A^3 B B A = A B A^3 B^2 A = A B A^6 = A B^3 = A^3 B$$

$$A^3 B A^3 B A B \Rightarrow A^3 B A^3 B B A^3 = A^3 B A^3 A^2 A^3 = A^3 B$$

Conclusion :

Ceci démontre bien la propriété $BAB^{-1} = A^{-1}$. Lorsque A et B sont des quaternions.

Remarque :

On vérifie immédiatement que $BAB^{-1} = A^{-1}$ lorsque $B = A$ et lorsque $B = A^2$; dans tous les autres cas, on a $BAB^{-1} = A^{-1}$.

BIBLIOGRAPHIE

- ABADIE Jean. « Non linear programming » North Holland Publishing Co, Amsterdam 1967.
- ALLAIS Maurice. « Traité d'Economie pure » Imprimerie Nationale tome 1 — p. 112-177.
- ALLEN R.D.G. « Mathematical Economics » Mac-Millan co Ltd Londres, p. 654-665.
- AKERS S.B.Jr et FRIEDMAN J. « A non numerical approach to Production Scheduling Problem » O.R.S.A. nov. 1955.
- BABBAR M.M. « Distribution of Solutions of a set of Linear équations (with applications to linear programming) J. Amer. Statist. Assoc. vol. 50 — 1955.
- BARANKIN E.W. « The scheduling Problem as an algebraic generalization of ordinary linear programming — (Logistic Research project — Discussion paper N° 9 — U.C.L. 28 août 1952.
- BAUDIN Louis. « Traité d'économie politique » 3° éd. Librairie Dalloz, tome 1 — chap. G. DEHOVE et J. GUITTON.
- BELLMAN R. « Mathematical aspects of Scheduling Theory » Rand report — 11 avril 1955.
- BEREANU B. Programme de risque minimal en programmation linéaire stochastique. C.R. Acad. Sc. Paris t. 259, 981-983 — 1964.
- BEREANU B. Région de décisions et de répartition de l'optimum dans la programmation linéaire. C.R. Acad. Sc. Paris t. 259, 1383-1386.
- CARTON D. « Programmes Linéaires stochastiques » Bulletin de la direction des études et recherches. Electricité de France. N° 1 — 1968 série c.p. 48/49.
- CHARNES A., W.W. COOPER et D. FARR. « Linear programming and profit preference scheduling for a manufacturing firm » J. O.R.S.A. vol. 1 — 1953.

- CHARNES A., COOPER W.W., HENDERSON. An introduction to linear Programming — New York, Wiley — 1953.
- CHARNES A. et C.E. LEMKE. « Minimization of non linear separable convex functionals » Naval Res. Logist. quart. vol. 1 N° 4, déc. 1954.
- COURTILLOT Marcel. Thèse de Doctorat ès-sciences — Chapitre sur la programmation stochastique.
- CRAMER H. « The elements of probability theory and some of its applications » John Wiley & Sons Inc. New York 1955.
- DANTZIG G.B. « Linear programming and Extensions » Princeton University Press — 1963 — 620 pages.
- DANTZIG G.B. « Linear Programming under uncertainty » Management Science — vol. 1 — 1955 p. 197.
- DANTZIG G.B. et A.R. FERGUSON. « The problem of routing aircraft, a mathematical solution » — Aeronautic Engin — Rev. 14 1955, p. 51-55.
- DANTZIG G.B. et A.R. FERGUSON. « The allocation of aircraft to routes ; an exemple of linear programming under uncertain demand ». Rand — p. 727 Management Sc. oct. 1956.
- DANTZIG G.B. et D.R. FULKERSON. « Minimizing the number of tankers to meet a fixed schedule ». Naval Res. Logist. quart. N° 3 sept-1954.
- DANTZIG G.B. et MADANSKY Albert. « On the solution of two stage linear programs under uncertainty ». The Rand Corporation — paper p. 2039 — 28 juillet 1960.
- DORFMAN, SAMUELSON and SOLOW. Programmation Linéaire et Gestion Economique. Traduction en français par G. FAIVELEY et C.J. WILLARD. Dunod — 1962 — 550 pages.
- DUGUE D. Traité de Statistiques théoriques et appliquées — Paris Masson et C° — 1958 — 314 pages.
- EL MAGHRABY S.E. An approach to linear programming under uncertainty — O.R.S.A. vol. 7 — mars 1954. Allocation under uncertainty when the demand has continuous d.f. Management Sc. N° 3 — avril 1960.
- FELLER William. An Introduction to Probability theory and its applications. Wiley and Sons, New York 1956.
- FORTET R. Introduction au calcul des probabilités. Ed. C.N.R.S.
- FORTET R. Programmes Linéaires Stochastiques. Monographie de Recherche Opérationnelle, Dunod 1964.
- FREUND R.J. « The Introduction of Risk into a programming model ». Econométrica, vol. 24 — N° 3 — juillet 1956.
- FRISCH R. — Maxima et minima — (avec la collaboration de A. NATAF, traduit par M. GILLIARD — Dunod 1960.

Stratégie en face d'une demande aléatoire

- HICKS J.R. « Value and Capital » sec. Ed. Oxford — Clarendon Press, p. 20 et ch. 1.
- KAUFMAN A. Problèmes de Stocks — Méthodes et Modèles de la Recherche Opérationnelle. (ch. IV) Dunod 1959.
- KOOPMANS T.C. Activity Analysis of Production and Allocation John Wiley & Sons inc. New York.
- Prof. Dr. W. KRELLE. (Univ. de Bonn All.) « Linear Programming under uncertainty » Proceedings of the sixth International meeting of T.I.M.S., Paris 1959.
- KUHN H.W. et A.W. TUCKER « Non Linear Programming ». Jersey Neyman (ed Proceedings of the second Kerkeley symposium on Mathematical Statistics and Probability — Univ. of Calif. press — Berkeley 1950.
- LEMAIRE J.M. Prévision et décision en Programmation linéaire stochastique — Thèse Grenoble 1967.
- LESOURNE J. Technique économique et Gestion industrielle. Dunod 1958 — 619 pages.
- MADANSKY Albert. Inequalities for Stochastic Linear Programming problems. Management Science — janv. 1960. « Methods of solution of linear programs under uncertainty » The corp. paper p. 2132 — 2 nov. 1960.
- MAHONEY Edward A. — Marketing Strategy — proceedings of the sixth international meeting of T.I.M.S. — Paris 1959.
- MANYSSARIAN O.L. « Non linear Programming problems with stochastic objective fonctions » Management Science X 1964, 353-359 and J.B. ROSEN « Inequalities for stochastic Non linear programming problems » Operations Research XII, 1964 143-154.
- MARKOWITZ Harry N. « Portfolio Selection » The journal of finance vol. VII N° 1 mars 1952.
- MARSHALL. Value and Capital, 2^e éd.
- MERLIN Pierre. Les Transports Parisiens — (Etude de Géographie économique et sociale). Thèse de Doctorat es-lettres, Paris 1966.
- MOGHADAM P.E. « Operational Research and its possible applications to Oil Company's operation » Journal of the Iranian society of engincers — N° 40 — 1968.
- MORICE E. et F. CHARTIER. Méthode Statistique — I.N.S.E.E. Imprimerie Nationale — Paris 1954.
- NEYMAN J. First course in Probability and Statistics vol. 1, Henry Holt & Cie inc. New York 1950.
- PERROUX F. Les techniques quantitatives de la planification — Presses Universitaires de France — 1965 — 307 p.
- RADNER, ROY. « The linear team : An exemple of linear programming under Uncertainty ». H.A. Antosiewicz (ed.) — Proceedings of the

- second symposium in linear programming vol. 2 — N.B.S./D.N.A./D.C.S. Comptroller. U.S.A.F. Wash. D.C. 1955 — p. 381-396.
- RADNER R. Team decisions functions. *Ann. of Math. Stat.* 21 — 1960, p. 347.
- REITER S. Surrogates for uncertain decision problems — minimal information for decision making — *Econometrica*, vol. 25 1957, p. 339-345.
- SAMUELSON P.A. « Foundations of Economic Analysis ». Harvard Univ. Press. Cambridge. p. 92-94 et p. 183.
- SIMON H.A. Dynamic Programming under uncertainty with a quadratic criterion function. *Econometrica* vol. 24 — 1956, p. 74-81.
- STIGLER G.J. « The theory of price ». The Mac-Millan C°, New York, p. 68-74.
- TALACKO J.V. « On Stochastic linear inequalities » *Trabajos estadist.* vol. 10 — 1959 — p. 89-112.
- THEIL H. A note on certainty equivalence in dynamic planning. *Econometrica* vol. 25 — 1957, p. 346-349.
- THEIL H. et E. KAPTEIN. The effect of forecasting errors on optimal programming — proceedings of the sixth international meeting of T.I.M.S. — Paris 1959.
- THOMAS A., C. ABRAHAM. « Micro-Economie », Dunod 1968 — Ch. 11 § 1.2.
- TINTNER G. « Stochastic linear programming with applications to agricultural economics ». Proceedings of the second symposium in linear programming Wash. D.C. 1955.
- TRONG LIEU BUI. On a problem of convexity and its applications to non linear stochastic programming. *J. Math. Anal. and Appl.* 8, 2, 177-187 — 1964.
- VAJDA S. Inequalities in stochastic linear programming. *Bull. internat. statist. inst.* vol. 36 — 1958, p. 357.
- VASZONYI Andrew. « Optimizing a function of additively separated variables subject to a simple restriction ». Proceedings of the second symposium in linear programming. D.C. 1955.
- VILLE J.A. « Algèbre Matricielle ». I.S.S.U.P. 1955.
- VILLE J.A. Modèle simplifié d'évolution économique d'un système à deux structures. *Moyens automatique de gestion*. Dunod, Paris 1961.
- VOTAW F. J.R. Programming under conditions of uncertainty. Proceedings of the second symposium in linear programming Wash. D.C. 1955 — vol. 11, p. 187.
- WETS R. « Programming under uncertainty : the complete problem. *Warscheinl. und Werw. geb.* 4 février 1966, p. 316-339.
- WILLARD C.J. « Initiation à la programmation linéaire ». C.D.U. Paris 1961. « Programmacion polinomial ». *Rev. mat.* vol. VII Fasc 4, Bogota 1965. « Stratégie en face d'une demande aléatoire ». C.R.

Stratégie en face d'une demande aléatoire

- Acad. Sc. Paris, série A, 1967. Mathematical Reviews, vol. 36 N° 1, Juillet 1968. (Ref. 1192). « Le problème actuel des transports ». Spirales. (Revue de documentation économique). N° 22. Paris déc. 1968. « Techniques Fonctionnelles », Paris, 1961-62-64.
- WILLIAMS A.C. « On stochastic linear programming ». J. Siam XIII, 1965 — 927-940.
- WILLIAMS A.C. Approximation formulas for stochastic linear programming. J. Siam XIV — 1966 — 668-677.
- WILLIAMS A.C. and M. AURIEL. « Remarks on linear programming under uncertainty » Operations Research XVI — 1968 — 198-201.
- WOLFE P., ROBERT L., GRAVES. Recent advances in mathematical programming. Mc. Graw Hill Book Cie — inc New York 1963.
- ZIEMBA W.T. « Non linear programming with simple recourse » Exposé Congrès Européen d'Econométrie, Amsterdam, sept. 1968.
- Annuaire Statistique de la France — I.N.S.E.E. Rétrospectif Ed. 1961.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	9
ESSAI DE SOLUTION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME	23
APPROCHE STOCHASTIQUE DE LA SUPPLÉMENTARITÉ	69
INTERPRÉTATION ÉCONOMIQUE	81
EXEMPLE A 3 VARIABLES	87
INTERPRÉTATION ÉCONOMIQUE	93
GROUPES HAMILTONIENS ET THÉORÈME DE HÖLDER	95
BIBLIOGRAPHIE	103

Achevé d'imprimer le 8 juin 1971
sur les presses de l'Imprimerie Labadie S.A.
27 - Evreux

Dépôt légal : 2^e trim. 1971
Numéro d'impression : 1082

